

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**ANÁLISE DO CONJUNTO CONVERSOR-DISPOSITIVO  
ELETROMAGNÉTICO : CONTRIBUIÇÃO À CRIAÇÃO DE  
BIBLIOTECA DE CONTROLE**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE  
SANTA CATARINA COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**Autor : Jorge Luis Roel Ortiz**


**Orientador : Prof. Patrick Kuo-Peng, Dr.**

**FLORIANÓPOLIS, FEVEREIRO DE 1998**

ANÁLISE DO CONJUNTO CONVERSOR-DISPOSITIVO ELETROMAGNÉTICO:  
CONTRIBUIÇÃO À CRIAÇÃO DE BIBLIOTECA DE CONTROLE

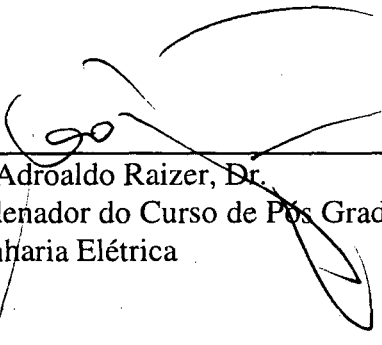
JORGE LUIS ROEL ORTIZ

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE MESTRE EM ENGENHARIA, ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA E  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO



---

Prof. Patrick Kuo-Peng, Dr.  
ORIENTADOR



---

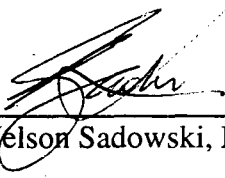
Prof. Adroaldo Raizer, Dr.  
Coordenador do Curso de Pós Graduação em  
Engenharia Elétrica

BANCA EXAMINADORA:



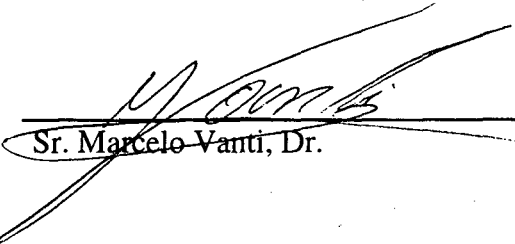
---

Prof. Patrick Kuo-Peng, Dr.



---

Prof. Nelson Sadowski, Dr.



---

Sr. Marcelo Vanti, Dr.

À minha mãe Elena (*In Memoriam*)

Ao meu pai Licurgo

À minha esposa e companheira Kathya

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador e amigo Prof. Dr. Patrick Kuo-Peng pelo estímulo, dedicação e interesse que sempre mostrou durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do GRUCAD pelo incentivo e ajuda constantes nestes dois anos: Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Prof. Adroaldo Raizer e Prof. Nelson Sadowski.

Aos colegas pela acolhida, camaradagem e a força que me deram nos momentos difíceis: Ivan, Emerson, Mauro, André, Gianfranco, Pinho, Maurício, Ana, Guilherme, Eugênio.

À Capes pelo apoio financeiro.

Ao Sr. Marcelo Vanti pela paciente revisão da dissertação.

À Anita e Ana Paula pela amizade que me fez sentir em família e pela imensurável ajuda.

Ao Chefe da Seção de Expediente da Pós Graduação em Engenharia Elétrica Wilson Silva da Costa meu sincero reconhecimento pelo apoio e colaboração constantes.

Ao meu tio Virgilio pelo seu incansável estímulo e desinteressado apoio.

À minha esposa Kathy pela paciência, compreensão e apoio nas intermináveis horas de trabalho.

## RESUMO

Este trabalho apresenta um método de implementação do laço de controle no análise da associação conversor-estrutura eletromagnética. O dispositivo eletromagnético é modelado pelo método dos elementos finitos em duas dimensões e o conversor estático é estudado no espaço de estado. As equações de estado do conversor são construídas de maneira automática. Estas equações são logo acopladas às equações da estrutura eletromagnética e, são resolvidas simultaneamente.

Como contribuição original, problemas envolvendo operação com laços de realimentação serão tratados por meio do controle amostrado. A fim de validar o método proposto, foram realizadas várias simulações que serão comparadas com resultados obtidos com o programa PSPICE.

## ABSTRACT

This work presents an implementation method of the control loop in the analysis of the association converter-electromagnetic structure. The electromagnetic device is modelled by two-dimensional finite element method and the static converter is studied in the state space. The state variable equations of the converter are constructed in an automatic way. These equations are then coupled to the electromagnetic ones and are solved simultaneously.

As original contribution, problems involving feedback control operation are now treated by mean of sampled control loops. In order to validate the proposed method, several simulations are performed and then compared with results obtained by PSPICE program.

# SUMÁRIO

Resumo	v
Abstract	vi
Sumário	vii
Lista de figuras	x
Simbologia	xiii
<b>Introdução Geral</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 1 : Análise do Dispositivo Eletromagnético e o Método dos Elementos Finitos</b>	
1.1 Introdução	4
1.2 Equações fundamentais do eletromagnetismo	5
1.3 Formulação usando o potencial vetor magnético	7
1.4 Aproximação para um sistema bi-dimensional em coordenadas cartesianas	9
1.4.1 Condições de contorno	10
1.4.1.1 Condições nas fronteiras	10
1.4.1.2 Condições nas interfaces entre diferentes meios	11
1.5 Equações considerando os condutores	13
1.5.1 Condutores maciços	14
1.5.2 Condutores finos	16
1.6 Discretização pelo método dos elementos finitos	19
1.6.1 A forma fraca	19
1.6.2 Formulação por elementos finitos	23
1.7 Conclusões	28
<b>Capítulo 2 : Formulação Matemática do Acoplamento de Conversores Estáticos com Estruturas Eletromagnéticas</b>	
2.1 Introdução	29
2.2 Estudo topológico dos circuitos	30
2.2.1 Matriz de cortes fundamentais	32
2.2.2 Matriz de laços fundamentais	35
2.2.3 Matriz de incidência	37
2.2.4 Relação entre as matrizes $K_2$ e $B_1$	38
2.2.5 Algoritmo de Welsch	39
2.3 Representação por variáveis de estado do circuito exterior de alimentação	42

2.4	Associação das equações do campo e do circuito de alimentação	43
2.4.1	Determinação das matrizes $G_1$ a $G_6$	47
2.4.1.1	Cálculo de $G_1$ , $G_2$ e $G_3$	51
2.4.1.2	Cálculo de $G_4$ , $G_5$ e $G_6$	54
2.4.1.3	Os interruptores no circuito de alimentação	55
2.5	Conclusões	57
<b>Capítulo 3 : Malha de Realimentação na Simulação do Conjunto Conversor/Estrutura Eletromagnética</b>		
3.1	Introdução	58
3.2	Posição do problema	59
3.3	Laço de controle em malha fechada no conjunto conversor/estrutura Eletromagnética	62
3.3.1	Laços de realimentação amostrados	63
3.3.2	Escolha do passo de cálculo	65
3.3.3	Escolha do período de amostragem	66
3.4	Cálculo da tensão nos interruptores e resistores	66
3.5	Gestão das comutações dos interruptores no modo de controle amostrado	69
3.6	Procura dos instantes exatos das comutações comandadas	71
3.7	Descrição do programa	76
3.7.1	Exemplo de aplicação	78
3.8	Limitações	83
3.9	Conclusões	84
<b>Capítulo 4 : Aplicações e Resultados</b>		
4.1	Introdução	85
4.2	Modulação senoidal com histerese	86
4.2.1	Exemplos de aplicação e resultados obtidos	89
4.2.1.1	Inversor monofásico em ponte completa	90
4.2.1.2	Inversor monofásico meia ponte	93
4.2.1.3	<i>Chopper</i> classe A	95
4.2.1.4	<i>Chopper</i> classe C	98
4.3	Modulação por largura de pulsos (PWM)	101
4.3.1	Modulação por largura de pulso único	101
4.3.2	Modulação por largura de pulsos múltiplos	102
4.3.3	Modulação por largura de pulsos senoidal	103



4.3.4 Exemplos de aplicação e resultados obtidos	103
4.3.4.1 Inversor monofásico em ponte completa (caso 1)	103
4.3.4.2 Inversor monofásico em ponte completa (caso 2)	105
4.4 Conclusões	107
<b>Conclusão Geral</b>	108
<b>Referências Bibliográficas</b>	110

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1.1 Representação de um sistema bi-dimensional contendo uma interface entre dois meios com permeabilidades magnéticas diferentes
- Figura 1.2 Periodicidade e anti-periodicidade na repetição geométrica de uma região
- Figura 1.3 Variação angular do campo magnético  $\vec{H}$  na passagem de um meio 1 para um meio 2 com permeabilidades diferentes
- Figura 1.4 Condutor maciço
- Figura 1.5 Condutores finos ou multifilamentares
- Figura 1.6 Elemento finito isoparamétrico triangular de primeira ordem
- Figura 2.1 Circuito elétrico e seu grafo orientado associado
- Figura 2.2 Convenção dos sinais nos elementos do circuito: a) convenção gerador; b) convenção receptor
- Figura 2.3 Árvore associada ao circuito elétrico
- Figura 2.4 Exemplos de corte e dos sub-grafos resultantes
- Figura 2.5 Cortes fundamentais I, II e IV
- Figura 2.6 Laços fundamentais III e V
- Figura 2.7 Relação entre as matrizes  $K_2$  e  $B_1$
- Figura 2.8 Associação conversor/estrutura eletromagnética
- Figura 2.9 Representação por Rede de Pétri
- Figura 3.1 Procura das comutações espontâneas
- Figura 3.2 Laço de controle em malha aberta
- Figura 3.3 Laço de controle em malha fechada
- Figura 3.4 Fluxograma dos comandos em cada passo de cálculo
- Figura 3.5 Diagrama do amostrador
- Figura 3.6 Laços de controle no modo amostrado
- Figura 3.7 Fluxograma da simulação do laço de realimentação amostrado
- Figura 3.8 Representação por Rede de Pétri
- Figura 3.9 Procura das comutações comandadas com período de amostragem  $T$ , num controlador do tipo modulação senoidal com histerese
- Figura 3.10 Caso onde não é feita a procura dos instantes exatos em que acontecem as

comutações comandadas

- Figura 3.11 Volta ao instante de amostragem anterior a  $(n+1)T$  na procura do momento exato de ultrapassagem da referência
- Figura 3.12 Volta ao passo de cálculo anterior na procura do instante exato da ultrapassagem da referência
- Figura 3.13 O instante mais próximo à referência antes da ultrapassagem ( $\text{Erro}=1e-4$ )
- Figura 3.14 Procura das comutações comandadas
- Figura 3.15 Comutações comandadas; a) sem procura dos instantes exatos em que estas aparecem; b) com procura destes instantes
- Figura 3.16 Estrutura lógica levando em conta os controladores amostrados
- Figura 3.17 Diagrama de blocos do programa de controle
- Figura 3.18 Conversacional simplificado definindo o tempo de amostragem e os resistores de medida a controlar
- Figura 3.19 *Chopper* classe A
- Figura 3.20 Corrente de referência e o erro permissível
- Figura 3.21 Fluxograma do sub-programa de controle por valores extremos de corrente
- Figura 3.22 Sub-programa da lei de controle
- Figura 3.23 Corrente no dispositivo eletromagnético para exemplo de aplicação
- Figura 4.1 Diagrama de blocos do controle por modulação senoidal com histerese
- Figura 4.2 Modulação senoidal com histerese
- Figura 4.3 Comportamento do sinal dentro da faixa de histerese
- Figura 4.4 Diagrama de blocos do conjunto conversor/estrutura eletromagnética e controle por modulação senoidal com histerese
- Figura 4.5 Dispositivo eletromagnético discretizado pelo método dos elemento finitos
- Figura 4.6 Mapa das linhas de campo do dispositivo eletromagnético
- Figura 4.7 Inversor monofásico em ponte completa
- Figura 4.8 Corrente no dispositivo eletromagnético para o circuito inversor a transistor
- Figura 4.9 Corrente no dispositivo eletromagnético para o circuito inversor a tiristor
- Figura 4.10 Corrente no indutor para o inversor ponte completa (PSPICE)
- Figura 4.11 Inversor monofásico em meia ponte
- Figura 4.12 Corrente no dispositivo eletromagnético para o circuito inversor meia ponte a transistor

- Figura 4.13 Corrente no indutor para o inversor em meia ponte (PSPICE)
- Figura 4.14 *Chopper* classe A
- Figura 4.15 Corrente no dispositivo eletromagnético para o *chopper* classe A a transistor
- Figura 4.16 Corrente no dispositivo eletromagnético para o *chopper* classe A a tiristor
- Figura 4.17 Corrente no indutor para o *chopper* classe A (PSPICE)
- Figura 4.18 *Chopper* classe C
- Figura 4.19 Corrente no dispositivo eletromagnético para o circuito *chopper* classe C a transistor
- Figura 4.20 Corrente no dispositivo eletromagnético para o circuito *chopper* classe C a tiristor
- Figura 4.21 Corrente no indutor para o *chopper* classe C (PSPICE)
- Figura 4.22 Modulação por largura de pulso único
- Figura 4.23 Modulação por largura de pulsos múltiplos
- Figura 4.24 Modulação por largura de pulsos senoidal
- Figura 4.25 Corrente no dispositivo eletromagnético (Caso 1)
- Figura 4.26 Corrente no indutor (Caso 1 – PSPICE)
- Figura 4.27 Corrente no dispositivo eletromagnético (Caso 2)
- Figura 4.28 Corrente no indutor (Caso 2 – PSPICE)

## SIMBOLOGIA

$A_e$	Potenciais vetor nos nós do elemento isoparamétrico
$a_{ij}$	Matriz de incidência
Amp	Amplitude da senoide de referência (modulação senoidal com histerese)
$B_1, B_2$	Sub-matrizes de $b_{ij}$
$B_{1n}, B_{2n}$	Componentes normais da indução magnética
$b_{ij}$	Matriz dos laços fundamentais
$C_1$	Sub-matriz dos capacitores de ramo
$C_2$	Sub-matriz dos capacitores de elo
$c_e$	Matriz elementar de contribuição
$D$	Matriz correspondente aos ímãs permanentes
$d_e$	Matriz elementar de contribuição
Div	Operador divergente
$E$	Matriz das tensões e correntes de alimentação
$G_1, a, G_6$	Matrizes que dependem da topologia do circuito elétrico
Grad	Operador gradiente
$H_n$	Componente normal do campo magnético
$H_{tg}$	Componente tangencial do campo magnético
$I$	Corrente no dispositivo eletromagnético conectado ao circuito
$i_b$	Corrente nos ramos da árvore
$i_{bc}$	Corrente nos capacitores de ramo
$i_{bl}$	Corrente nos indutores de ramo
$I_f$	Corrente em cada um dos $N_{co}$ condutores finos
$i_j$	Fonões de corrente
$i_m$	Corrente de elo
$I_m$	Corrente total que percorre o condutor maciço
$i_{mc}$	Corrente nos capacitores de elo
$i_{mi}$	Corrente nos enrolamentos da estrutura eletromagnética
$i_{ml}$	Corrente nos indutores de elo
$k$	Caracteriza a periodicidade ou anti-periodicidade
$K_1, K_2$	Sub-matrizes de $k_{ij}$

$k_{ij}$	Matriz de cortes fundamentais
$L$	comprimento do condutor espesso
$L$	Matriz das indutâncias das cabeças de bobinas
$L_1$	Sub-matriz dos indutores de ramo
$L_2$	Sub-matriz dos indutores de elo
$M$	Matriz de permeabilidade
$m_e$	Matriz elementar de contribuição
$M_u$	Sub-matriz das indutâncias mútuas entre indutores de elo e indutores de ramo
$N$	Matriz de condutividade
$N_{co}$	Número de condutores finos
$N_e$	Função de interpolação (função de forma)
$n_e$	Matriz elementar de contribuição
$P$	Matriz que relaciona a corrente no elemento aos nós do elemento
$p_e'$	Matriz elementar de contribuição
$Q$	Matriz de enlace de fluxo nas bobinas
$q_e$	Matriz elementar de contribuição
$q_e'$	Matriz elementar de contribuição
$R$	Matriz das resistências dos enrolamentos
$R$	Resíduo (diferença entre uma solução exata e uma solução aproximada)
$R_1$	Sub-matriz dos resistores de ramo
$R_2$	Sub-matriz dos resistores de elo
$Ref_{inf}$	Referência inferior (modulação senoidal com histerese)
$Ref_{sup}$	Referência superior (modulação senoidal com histerese)
$R_f$	Resistência total dos $N_{co}$ condutores finos
$R_m$	Resistência DC do condutor maciço
$rot$	Operador rotacional
$s$	Seção de cada condutor fino
$S_1$ a $S_{25}$	Elementos da matriz $B_1$
$S_f$	Seção do conjunto de $N_{co}$ condutores finos
$S_m$	Seção do condutor maciço
$t$	Tempo
$tpasso$	Passo de cálculo no tempo

$U_f$	Diferença de potencial no conjunto dos $N_{co}$ condutores finos
$U_m$	Diferença de potencial entre os extremos do condutor espesso
$v_b$	Tensão nos ramos
$v_{bc}$	Tensão nos capacitores de ramo
$v_{bl}$	Tensão nos indutores de ramo
$v_{br}$	Tensão nos resistores de ramo
$v_e$	Fontes de tensão
$v_m$	Tensão de elo
$v_{ml}$	Tensão nos indutores de elo
$v_{mr}$	Tensão nos resistores de elo
$W$	Função de ponderação
$X$	Variável de estado
$Y$	Variável de saída (tensão nos resistores)
$\bar{E}$	Campo elétrico
$\bar{H}$	Campo magnético
$\bar{J}$	Densidade de corrente
$\frac{\partial A}{\partial n}$	Derivada normal do potencial vetor
$\bar{D}$	Indução elétrica
$\bar{B}$	Indução magnética
$H_e$	Matriz das derivadas da função de interpolação
$\bar{A}$	Potencial vetor magnético
$\bar{n}$	Vetor unitário na direção normal à superfície de separação dos meios
$\bar{t}_g$	Vetor unitário na direção tangencial à superfície de separação dos meios
$B_{on}, B_{otg}$	Componentes normal e tangencial da indução magnética remanente
$\bar{B}_o$	Indução magnética remanente
$\sigma$	Condutividade elétrica
$\rho$	Densidade de carga elétrica
$\Omega$	Domínio do problema
$\phi$	Fase do sinal de referência (modulação senoidal com histerese)
$\Gamma$	Fronteira do domínio $\Omega$
$\mu$	Permeabilidade magnética
$\phi$	Potencial escalar elétrico

$\omega$	Pulsção do sinal de referência (modulação senoidal com histerese)
$\nu$	Relutividade magnética
$\Delta I$	Ondulação máxima permitida na variável de controle (histerese)
$\alpha_m$	Função de interpolação
$\mu_o$	Permeabilidade magnética do vácuo
$[\sigma]$	Tensor de condutividade elétrica do meio
$[\mu]$	Tensor de permeabilidade magnética do meio
$[\epsilon]$	Tensor de permissividade elétrica do meio



## Introdução Geral

O comportamento dos dispositivos eletromagnéticos é caracterizado pela distribuição dos campos eletromagnéticos no seu interior e na região ao redor dele. As equações de Maxwell regem estes campos eletromagnéticos. A solução destas equações, na maioria dos casos reais, é de difícil abordagem por métodos analíticos. Com o desenvolvimento dos computadores digitais, permitiu-se a utilização de métodos numéricos para a solução das equações de Maxwell e para descrever, de modo mais preciso, o comportamento destes dispositivos eletromagnéticos. Neste trabalho são apresentadas as equações que descrevem o comportamento de uma estrutura eletromagnética em duas dimensões. Estas equações são aproximadas pelo método residual de Galerkin (ou de resíduos ponderados). A discretização e resolução são feitas utilizando o método dos elementos finitos, que é uma técnica numérica que parte do princípio de que o domínio de estudo deve ser decomposto ou discretizado em pequenas regiões, chamadas de elementos finitos. Após a aplicação do método de elementos finitos, obtém-se um sistema matricial de equações que descreve o comportamento da estrutura eletromagnética.

Para simular dispositivos eletromagnéticos alimentados por conversores estáticos, é utilizada uma solução simultânea das equações de campo e do circuito elétrico. As equações para o conversor estático estão baseadas nos métodos da teoria de circuitos elétricos. O circuito do conversor estático pode conter semicondutores de potência, os quais mudam seus estados de acordo com a sua sequência de operação. Adota-se, neste trabalho, um modelo resistivo binário para os semicondutores de potência. As equações de estado do conversor são determinadas para qualquer sequência de operação durante a simulação, de modo automático, a partir da descrição topológica do circuito. Portanto, uma revisão do estudo topológico do circuito é inicialmente apresentada. As equações de campo da estrutura eletromagnética são combinadas diretamente com as equações de estado do circuito do conversor. Este acoplamento é realizado através de duas grandezas comuns à estrutura eletromagnética e o conversor, que são a corrente nas estruturas eletromagnéticas e a tensão nos seus terminais.

No estado atual do programa EFCIR (programa de simulação numérica de conversores estáticos associados a estruturas eletromagnéticas modeladas pelo método dos elementos finitos), precisa-se que as ordens de comando dos semicondutores de potência (diodos, transistores, tiristores e tiristores duais) do conversor estático que alimentam a estrutura eletromagnética, sejam pré-definidas no início da simulação. O usuário deve definir, num período, os instantes de disparo e de bloqueio dos semicondutores de potência. Estas ordens de comando são repetidas durante toda a simulação. Esta pré-definição das ordens de comando dos semicondutores torna impossível a definição de laços de controle em malha fechada. Na maioria dos conversores as ordens de comando dos semicondutores são definidas de acordo com as grandezas elétricas de saída e com a lei de controle que se deseja aplicar.

Em sistemas com laço de controle em malha aberta, a referência é imposta pelo usuário e a variável de saída não tem influência sobre a variável de entrada, portanto, a saída pode divergir do valor de saída desejado. De modo que, a saída do sistema segue a referência de maneira muito limitada, qualquer perturbação produzida no sistema vai se refletir na saída. Portanto, é mais conveniente intervir diretamente sobre os comandos dos semicondutores de potência, conseguindo desta forma que a variável de saída fique o mais próximo possível de um valor pré-determinado. Isto é possível utilizando um laço de controle com malha fechada onde o disparo e bloqueio dos semicondutores não são mais pré-definidos.

O objetivo geral do presente trabalho é desenvolver um método que permita analisar dispositivos eletromagnéticos modelados pelo método dos elementos finitos em duas dimensões conectados a conversores estáticos levando em conta a malha de realimentação. Nele as ordens de comando podem ser geradas de modo independente, sendo que os circuitos que geram estas ordens de comando não precisam ser modelados. Uma modificação das transições das Rede de Pétri é apresentada para sua aplicação com uma lei de controle qualquer. O método desenvolvido será implementado no software existente. Estas ordens de comando, em sistemas com laço de controle em malha fechada, forçam o semicondutor a mudar seu estado. A gestão das mudanças de estado dos interruptores é efetuada em função das grandezas binárias pelas ordens de comando (bloqueio-condução) e das grandezas elétricas (tensão e corrente próprias ao interruptor considerado).

Destacam-se os seguintes objetivos específicos:

- Estudo da modelagem de dispositivos eletromagnéticos pelo método de elementos finitos em duas dimensões.
- Estudo dos diferentes modelos dos semicondutores e a gestão por Rede de Pétri.
- Pesquisa de soluções que permitam simular os conversores estáticos associados às estruturas eletromagnéticas levando em conta o laço de controle em malha fechada.
- Implementação computacional do método achado.

Para expor todos os objetivos específicos, o presente trabalho divide-se nos seguintes capítulos:

Cap1. Análise do Dispositivo Eletromagnético e o Método dos Elementos Finitos, onde são apresentadas as equações que descrevem o comportamento de uma estrutura eletromagnética em duas dimensões.

Cap2. Formulação Matemática do Acoplamento de Conversores Estáticos com Estruturas Eletromagnéticas. Aqui é apresentado um método geral para o acoplamento das equações do conversor estático com as equações da estrutura eletromagnética.

Cap3. Malha de Realimentação na Simulação do Conjunto Conversor/Estrutura Eletromagnética, onde é proposto um método que permita analisar dispositivos eletromagnéticos conectados a conversores estáticos levando em conta a malha de realimentação.

Cap4. Aplicações e Resultados, onde são simulados alguns exemplos utilizando o método proposto; os resultados são validados utilizando o programa PSPICE.

Conclusões.

# Capítulo 1

## Análise do Dispositivo Eletromagnético e o Método dos Elementos Finitos

### 1.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar as equações que descrevem o comportamento de uma estrutura eletromagnética em duas dimensões. Inicialmente são apresentadas as equações fundamentais do eletromagnetismo. As condições nas fronteiras e na interface de separação entre diferentes meios também são estudadas.

Utiliza-se neste trabalho a formulação com o potencial vetor magnético. Esta formulação permite o estudo em regiões onde existem correntes, possibilitando a resolução de problemas com correntes de Foucault. Em duas dimensões, o potencial vetor magnético possui apenas um componente ortogonal ao plano de análise.

Considera-se dois tipos de condutores: (i) “condutores espessos ou maciços”, com dimensões suficientemente grandes, de modo que a corrente não é distribuída uniformemente na sua seção, o que origina um efeito pelicular; (ii) “condutores finos ou multifilamentares” (geralmente encontram-se nas bobinas), com dimensões reduzidas, onde a corrente é distribuída uniformemente ao longo da seção.

O problema é aproximado pelo método residual de Galerkin (ou de resíduos ponderados). A discretização e resolução são feitas utilizando o método dos elementos finitos [2][26]. Nesta discretização utiliza-se elementos finitos isoparamétricos triangulares de primeira ordem.

Após efetuar a condensação das matrizes elementares de todos os elementos, obtém-se um sistema matricial de equações que descreve o comportamento da estrutura eletromagnética. Neste sistema supõe-se que os condutores maciços são conexos (ligados entre si) e curto-circuitados, e, que apenas os condutores finos são alimentados por circuitos elétricos externos.

## 1.2 Equações Fundamentais do Eletromagnetismo

Um campo eletromagnético é caracterizado por quatro grandezas vetoriais, as quais são função do tempo e do espaço: o campo elétrico  $\vec{E}$ , o campo magnético  $\vec{H}$ , a indução magnética  $\vec{B}$  e a indução elétrica  $\vec{D}$ . Estas quatro grandezas são regidas pelas equações de Maxwell [2]:

$$\text{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad (1.1)$$

$$\text{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad (1.2)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{div}\vec{D} = \rho \quad (1.4)$$

onde:

$\vec{E}$  : Campo elétrico (V/m);

$\vec{B}$  : Indução magnética (T);

$\vec{H}$  : Campo magnético (A/m);

$\vec{D}$  : Indução elétrica (C/m<sup>2</sup>);

t : Tempo (seg.);

$\vec{J}$  : Densidade de corrente (A/m<sup>2</sup>);

$\rho$  : Densidade de carga elétrica (C/m<sup>3</sup>).

Existe um grupo de relações adicionais entre os vetores de campo, denominadas equações constitutivas, que dependem do meio onde existe o campo:

$$\vec{D} = [\epsilon] \vec{E} \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = [\mu] \vec{H} + \vec{B}_0 \quad (1.6)$$

$$\vec{J} = [\sigma] \vec{E} \quad (1.7)$$

onde:

$[\epsilon]$  : Tensor de permissividade elétrica do meio (F/m);

$[\mu]$  : Tensor de permeabilidade magnética do meio (H/m);

$[\sigma]$  : Tensor de condutividade elétrica do meio  $((\Omega m)^{-1})$ ;

$\vec{B}_0$  : Indução magnética remanente (T).

A indução magnética remanente é acrescentada para que casos com ímãs permanentes possam ser tratados. No caso em que os meios são isotrópicos, os tensores  $[\epsilon]$ ,  $[\mu]$  e  $[\sigma]$  se reduzem aos escalares  $\epsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$ . Neste trabalho apenas meios isotrópicos serão considerados.

Na eletrotécnica, onde se trabalha com frequências relativamente baixas, as equações de Maxwell, para tratar problemas magnetodinâmicos, podem ser escritas como [2][26]:

$$\text{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.8)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (1.9)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (1.10)$$

A equação da continuidade elétrica é encontrada aplicando a divergência a ambos os lados da equação (1.9):

$$\text{div} \vec{J} = 0 \quad (1.11)$$

### 1.3 Formulação usando o potencial vetor magnético.

A partir da equação (1.10) e lembrando-se que o  $\text{div}(\text{rot})$  é nulo, pode-se definir um potencial vetor magnético  $\vec{A}$ , tal que:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad (1.12)$$

A definição deste potencial vetor permite tratar problemas com regiões onde há presença de correntes.

Substituindo-se (1.12) em (1.8), obtém-se:

$$\text{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad (1.13)$$

Como o  $\text{rot}(\text{grad})$  é nulo, pode-se definir, a partir da equação (1.13), um potencial escalar elétrico  $\phi$ , tal que:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\phi \quad (1.14)$$

A combinação da equação para o campo elétrico (1.14) e a relação constitutiva (1.7), da densidade de corrente, leva a:

$$\vec{J} = \sigma \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\phi \right) \quad (1.15)$$

A equação que descreve o comportamento magnetodinâmico é obtida pela combinação das equações (1.6) e (1.9),

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \vec{B}\right) - \text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \vec{B}_0\right) = \vec{J}$$

e das equações (1.12) e (1.15),

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot}\vec{A}\right) - \text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\vec{B}_0\right) = \sigma\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\phi\right)$$

o que resulta em:

$$\text{rot}(v\text{rot}\vec{A}) = -\sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \sigma\text{grad}\phi + \text{rot}(v\vec{B}_0) \quad (1.16)$$

onde:

$v$  : Relutividade magnética ( $v=1/\mu$ )

A equação (1.16) é relativa ao potencial vetor magnético em regiões onde existam ímãs permanentes. Em regiões onde estes ímãs não estão presentes,  $\vec{B}_0$  será nula. Além disso, em regiões onde tem-se  $\sigma=0$  e existem correntes impostas externamente, a equação (1.16) é expressa como sendo [19]:

$$\text{rot}(v\text{rot}\vec{A}) = \vec{J}_s \quad (1.17)$$

onde  $\vec{J}_s$  representa a corrente imposta. Em regiões onde  $\sigma=0$ , e não existem correntes impostas, a equação (1.17) torna-se:

$$\text{rot}(v\text{rot}\vec{A}) = 0 \quad (1.18)$$



#### 1.4 Aproximação para um sistema bi-dimensional em coordenadas cartesianas.

Na aproximação para um sistema 2D, considera-se a indução magnética pertencente ao plano OXY, a densidade de corrente  $\vec{J}$  e o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  sendo perpendiculares ao plano OXY, (figura 1.1).

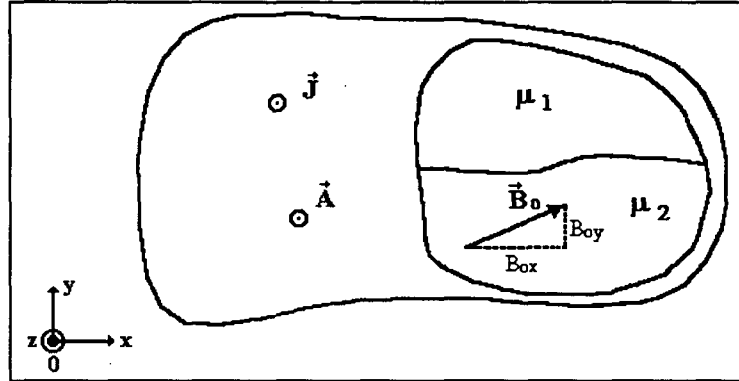


Figura 1.1 Representação de um sistema bi-dimensional contendo uma interface entre dois meios com permeabilidades magnéticas diferentes.

Por consequência  $\vec{A}$  e  $\vec{J}$  têm apenas um componente:

$$\vec{A} = A \vec{k} \quad (1.19)$$

$$\vec{J} = J \vec{k} \quad (1.20)$$

$$\vec{B}_0 = B_{ox} \vec{i} + B_{oy} \vec{j} \quad (1.21)$$

Com estas considerações, a equação da magnetodinâmica (1.16) pode ser escrita em coordenadas cartesianas como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma \text{grad} \phi - v \frac{\partial B_{oy}}{\partial x} + v \frac{\partial B_{ox}}{\partial y} \quad (1.22)$$

### 1.4.1 Condições de contorno.

Para resolver a equação (1.22) deve-se inserir as condições de contorno, que podem ser: condições nas fronteiras do domínio de estudo e condições nos limites de separação dos meios.

#### 1.4.1.1 Condições nas fronteiras.

a ) **Condição de Dirichlet** - o valor do potencial vetor  $\vec{A}$  é fixo e constante na fronteira.

$$A=A_0$$

b ) **Condição de Neumann** - o potencial vetor não é conhecido, mas sua derivada normal é imposta no contorno.

$$\frac{\partial A}{\partial n} = q_0$$

Para problemas eletromagnéticos o fluxo é nulo ( $q_0=0$ ). Em problemas térmicos (transmissão de calor), trocas de calor podem ocorrer através da fronteira. Neste caso,  $q_0$  diferente de zero representa fluxo térmico [19].

c ) **Condição de periodicidade ou anti-periodicidade** - Um problema periódico ou anti-periódico é caracterizado por uma repetição da geometria de um domínio S, como mostrado na figura 1.2 [27]:

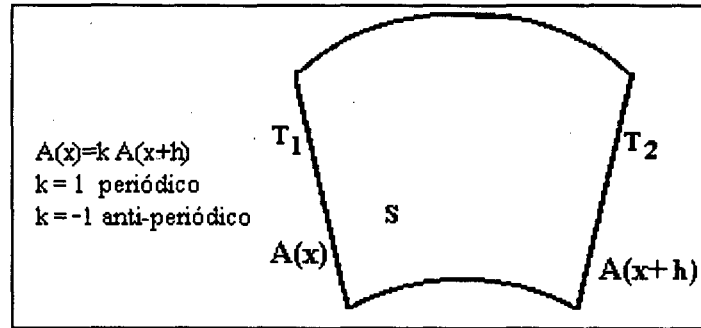


Figura 1.2 Periodicidade e anti-periodicidade na repetição geométrica de uma região.

Quando os potenciais  $A(x)$  e  $A(x+h)$ , nos nós das fronteiras  $T_1$  e  $T_2$  respectivamente, forem iguais, tem-se a condição de periodicidade; se estes potenciais foram iguais mas com sinal invertido, a condição será de anti-periodicidade.

#### 1.4.1.2 - Condições nas interfaces entre diferentes meios.

O campo magnético, na passagem de um meio para outro com diferente permeabilidade, sofre uma variação na sua direção [2], segundo é apresentado na figura 1.3.

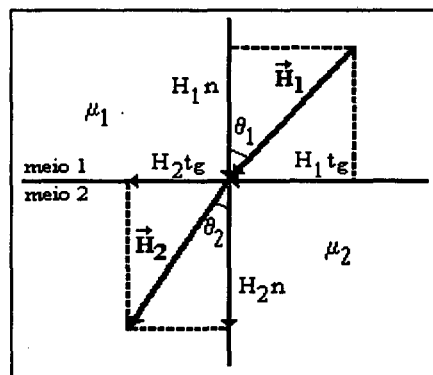


Figura 1.3 Variação angular do campo magnético  $\vec{H}$  na passagem de um meio 1 para um meio 2 com permeabilidades diferentes.

Assumindo que não existam correntes no limite de separação entre os dois meios, pode-se demonstrar que as componentes tangenciais do campo magnético e as componentes normais da indução magnética se conservam:

$$H_{1tg} = H_{2tg} \quad (1.23)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (1.24)$$

**a) Conservação da componente tangencial do campo magnético.**

A partir da relação constitutiva  $\vec{B} = \mu\vec{H}$ , e escrevendo-se o campo magnético e a indução magnética em suas componentes tangencial e normal obtém-se:

$$\vec{B} = \mu H_n \vec{n} + \mu H_{t_g} \vec{t}_g = B_n \vec{n} + B_{t_g} \vec{t}_g \quad (1.25)$$

onde:

$\vec{n}$  : vetor unitário na direção normal à superfície de separação dos meios;

$\vec{t}_g$  : vetor unitário na direção tangencial à superfície de separação dos meios;

A partir das equações (1.12) e (1.19), a indução magnética também pode ser expressa em função do potencial vetor magnético por:

$$\vec{B} = \frac{\partial A}{\partial t_g} \vec{n} - \frac{\partial A}{\partial n} \vec{t}_g \quad (1.26)$$

logo, igualando termos entre as equações (1.25) e (1.26), observa-se que a componente tangencial do campo magnético é expressa por:

$$H_{t_g} = -v \frac{\partial A}{\partial n} \quad (1.27)$$

Como a componente tangencial do campo magnético se conserva, no limite de separação entre os meios, equação (1.23), conclui-se que:

$$v_1 \left( \frac{\partial A}{\partial n} \right)_1 = v_2 \left( \frac{\partial A}{\partial n} \right)_2 \quad (1.28)$$

Se um dos meios comporta ímãs permanentes, como o meio 2 na figura 1.1, a indução magnética é dada pela equação (1.6). Nesse caso as componentes da indução magnética serão [27]:

$$\vec{B} = (\mu H_n + B_{on}) \vec{n} + (\mu H_{tg} + B_{otg}) \vec{t}_g \quad (1.29)$$

e a continuidade da componente tangencial do campo magnético, neste caso será:

$$v_1 \left( \frac{\partial A}{\partial n} \right)_1 = v_2 \left( \frac{\partial A}{\partial n} \right)_2 + \frac{1}{\mu_o} B_{otg} \quad (1.30)$$

#### b) Conservação da componente normal da indução magnética.

A continuidade da componente normal da indução magnética é dada pela equação (1.24), combinando-se esta com a equação (1.26) obtém-se :

$$\left( \frac{\partial A}{\partial t_g} \right)_1 = \left( \frac{\partial A}{\partial t_g} \right)_2 \quad (1.31)$$

### 1.5 Equações considerando os condutores.

Considera-se dois tipos de condutores, que se diferenciam pelas suas dimensões segundo a direção perpendicular ao sentido da corrente: (i) os “condutores maciços ou espessos”, que possuem dimensões suficientemente grandes de modo que a corrente não é distribuída uniformemente na sua seção, o que origina um efeito pelicular; (ii) os “condutores finos ou multifilamentares”, tais como os existentes em bobinas constituídas de espiras de fios

com seções reduzidas, nas quais a corrente é considerada como uniformemente distribuída ao longo da seção.

### 1.5.1 Condutores maciços.

Seja um condutor de seção  $S_m$  e comprimento  $L$  (figura 1.4):

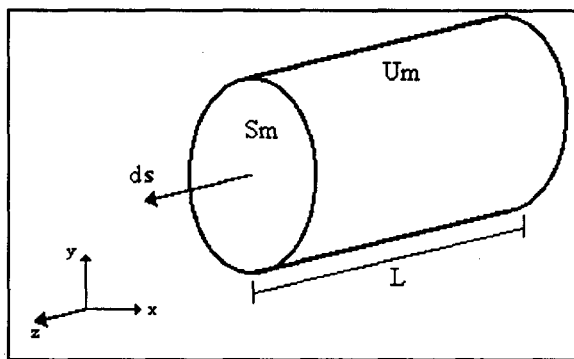


Figura 1.4 Condutor maciço

onde  $U_m$  representa a diferença de potencial entre os extremos do condutor.

Considera-se que o condutor não tem imãs, o que leva a equação da magnetodinâmica (1.22) para condutores maciços tomar a forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma \text{grad} \phi \quad (1.32)$$

Na hipótese de um sistema bi-dimensional, e segundo a orientação do condutor maciço da figura 1.4, define-se o potencial escalar elétrico como sendo [26]:

$$\phi = \phi_1 z + \phi_0 \quad (1.33)$$

e a diferença de potencial no condutor maciço da figura 1.4 pode ser calculada por:

$$U_m = \int_0^L -(\text{grad}\phi dL) = -\phi_1 L \quad (1.34)$$

onde:

$$\phi_1 = \text{grad}\phi$$

sendo que:

$$\text{grad}\phi = -\frac{U_m}{L} \quad (1.35)$$

Substituindo a equação (1.35) em (1.15) e integrando-se a densidade de corrente sobre a seção  $S_m$  do condutor maciço, a corrente total  $I_m$  que percorre o condutor é obtida:

$$I_m = \sigma \frac{U_m}{L} S_m - \iint_{S_m} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} dS \quad (1.36)$$

Define-se a resistência DC do condutor maciço como sendo:

$$R_m = \frac{L}{\sigma S_m} \quad (1.37)$$

isolando  $S_m$  de (1.37) e substituindo na equação (1.36) obtém-se:

$$I_m = \frac{U_m}{R_m} - \iint_{S_m} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} dS \quad (1.38)$$

De onde pode-se concluir que a corrente total é igual a uma corrente imposta (DC) menos uma corrente induzida de efeito pelicular.

Finalmente, substituindo-se (1.35) em (1.32), e isolando-se  $U_m$  de (1.38), as equações que descrevem os fenômenos para condutores maciços, são dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma \frac{U_m}{L} = 0 \quad (1.39)$$

$$U_m = R_m I_m + R_m \iint_{S_m} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} dS \quad (1.40)$$

### 1.5.2 Condutores finos.

Sejam  $N_{co}$  condutores conectados em série (todos com seção  $s$  suficientemente pequena para evitar o efeito pelicular) constituindo as espiras de uma bobina, como se mostra na figura 1.5.

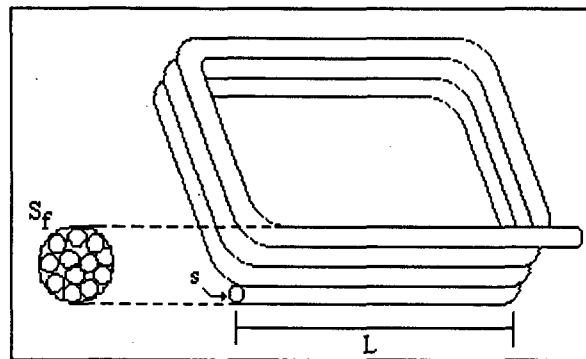


Figura 1.5 Condutores finos ou multifilamentares

As seguintes relações podem ser verificadas:

$$S_m = s \quad (1.41a)$$

$$I_m = I_f \quad (1.41b)$$

$$S_f = N_{co} s \quad (1.41c)$$

$$S_m = S_f / N_{co} \quad (1.41d)$$

$$U_m = U_f \quad (1.41e)$$



onde:

$N_{co}$  : Número de condutores;

$s$  : Seção de cada condutor;

$S_f$  : Seção do conjunto de  $N_{co}$  condutores;

$I_f$  : Corrente em cada um dos  $N_{co}$  condutores;

$S_m$  : Seção do condutor maciço;

$U_m$  : Diferença de potencial do condutor maciço;

$U_f$  : Diferença de potencial no conjunto dos  $N_{co}$  condutores.

Na figura 1.5 considera-se cada condutor de seção  $s$  como sendo um condutor maciço. As equações que descrevem os fenômenos nos condutores maciços são dadas por (1.39) e (1.40), e substituindo-se (1.40) em (1.39) com (1.37) obtém-se a expressão para a corrente total  $I_m$ , a qual segundo (1.41b) também será a corrente em cada um dos  $N_{co}$  condutores finos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{I_m}{S_m} + \frac{1}{S_m} \iint_{S_m} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} ds = 0 \quad (1.42)$$

Desprezando-se o efeito pelicular para o caso de condutores finos,  $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$ , e considerando-se (1.41b) e (1.41d), a equação (1.42) fica:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{N_{co} I_f}{S_f} = 0 \quad (1.43)$$

Utilizando-se 1.41c, define-se a resistência total dos  $N_{co}$  condutores finos como sendo:

$$R_f = \frac{L}{\sigma s} = \frac{L N_{co}}{\sigma S_f} \quad (1.44)$$

Substituindo (1.44) em (1.40) e levando-se em conta as relações (1.41b) e (1.41e), obtém-se:

$$U_f = R_f I_f + \frac{LN_{co}}{S_f} \iint_{S_f} \frac{\partial A}{\partial t} ds \quad (1.45)$$

onde o primeiro termo representa a queda na tensão devido à resistência  $R_f$  dos condutores finos e o segundo termo representa a força eletromotriz induzida.

As equações para condutores finos ou multifilamentares são dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{N_{co} I_f}{S_f} = 0 \quad (1.46)$$

$$U_f = R_f I_f + \frac{LN_{co}}{S_f} \iint_{S_f} \frac{\partial A}{\partial t} ds \quad (1.47)$$

Finalmente, as estruturas eletromagnéticas que comportam condutores maciços e condutores finos ou multifilamentares, são descritas pelas seguintes equações [27]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right) + \frac{N_{co} I_f}{S_f} + \sigma \frac{U_m}{L} = -v \frac{\partial B_{oy}}{\partial x} + v \frac{\partial B_{ox}}{\partial y} \quad (1.48)$$

$$U_m = R_m I_m + R_m \iint_{S_m} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} ds \quad (1.49)$$

$$U_f = R_f I_f + R_f \iint_{S_f} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} ds \quad (1.50)$$

Para estruturas que apresentam geometrias complexas, a resolução destas equações é feita com ajuda de métodos numéricos. Para a discretização espacial das equações de campo, neste trabalho, utiliza-se o método dos elementos finitos.

## 1.6 Discretização pelo método dos elementos finitos.

Nesta seção é apresentada a aproximação do problema original pelo método de Galerkin (ou de resíduos ponderados), e sua discretização utilizando-se a técnica dos elementos finitos.

### 1.6.1 A forma fraca

Define-se um resíduo  $R$  como sendo a diferença entre uma solução exata e uma solução aproximada [2]:

$$R = f(v) - f(u) \quad (1.51)$$

O método dos resíduos ponderados é agora definido pelo produto interno:

$$\langle W, R \rangle = \iint_{\Omega} WR d\Omega = 0 \quad (1.52)$$

onde:

$W$  - Função de ponderação definida para todos os nós do domínio  $\Omega$ .

Define-se o resíduo da equação (1.48) como sendo [26]:

$$R = \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right) + \frac{N_{co} I_f}{S_f} + \sigma \frac{U_m}{L} + v \frac{\partial B_{oy}}{\partial x} - v \frac{\partial B_{ox}}{\partial y} \quad (1.53)$$

Substituindo o resíduo de (1.53) em (1.52), obtém-se:

$$\iint_{\Omega} W \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right) + \frac{N_{co} I_f}{S_f} + \sigma \frac{U_m}{L} + v \frac{\partial B_{oy}}{\partial x} - v \frac{\partial B_{ox}}{\partial y} \right\} d\Omega = 0 \quad (1.54)$$

Para maior simplicidade, a equação (1.54) é tratada separadamente. Primeiro trata-se o primeiro termo do lado esquerdo desta equação:

$$\iint_{\Omega} W \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right\} d\Omega = \iint_{\Omega} W [\text{div}(v \text{grad} A)] d\Omega \quad (1.55)$$

Aplicando a identidade vetorial  $\text{div}(U\vec{C}) = \vec{C} \cdot \text{grad}U + U\text{div}\vec{C}$  em (1.55) tem-se:

$$\iint_{\Omega} W [\text{div}(v \text{grad} A)] d\Omega = \iint_{\Omega} \text{div}[W(v \text{grad} A)] d\Omega - \iint_{\Omega} v \text{grad} A \cdot \text{grad} W d\Omega \quad (1.56)$$

Utilizando o teorema da divergência, no primeiro termo do lado direito da equação (1.56), e definindo-se os gradientes de A e W como sendo [27]:

$$\begin{aligned} \text{grad} A &= \frac{\partial A}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial A}{\partial y} \vec{j} = \frac{\partial A}{\partial n} \vec{n} + \frac{\partial A}{\partial t} \vec{t} \\ \text{grad} W &= \frac{\partial W}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \vec{j} \\ \text{grad} A \cdot \vec{n} &= \left( \frac{\partial A}{\partial n} \vec{n} + \frac{\partial A}{\partial t} \vec{t} \right) \cdot \vec{n} = \frac{\partial A}{\partial n} \\ \text{grad} A \cdot \text{grad} W &= \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} \end{aligned}$$

a equação (1.55) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\iint_{\Omega} W \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right\} d\Omega = \oint_{\Gamma} W v \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma - \iint_{\Omega} v \left[ \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} \right] d\Omega \quad (1.57)$$

onde:

$\Gamma$ : Fronteira do domínio  $\Omega$ .

Considerando, agora, o segundo termo, referente aos ímãs, ou seja, o último termo do lado esquerdo da equação (1.54):

$$\iint_{\Omega} W \left\{ v \frac{\partial B_{oy}}{\partial x} - v \frac{\partial B_{ox}}{\partial y} \right\} d\Omega = \iint_{\Omega} W v \operatorname{div} \vec{B}_r d\Omega \quad (1.58)$$

onde foi definido o vetor  $\vec{B}_r = B_{oy} \vec{i} - B_{ox} \vec{j}$  de maneira que:

$$\operatorname{div} \vec{B}_r = \frac{\partial B_{oy}}{\partial x} - \frac{\partial B_{ox}}{\partial y}$$

Seguindo o mesmo procedimento feito anteriormente, pode-se escrever:

$$\iint_{\Omega} W \left\{ v \frac{\partial B_{oy}}{\partial x} - v \frac{\partial B_{ox}}{\partial y} \right\} d\Omega = \oint_{\Gamma} W v B_{ot} d\Gamma - v \iint_{\Omega} \left( B_{oy} \frac{\partial W}{\partial x} - B_{ox} \frac{\partial W}{\partial y} \right) d\Omega \quad (1.59)$$

Finalmente, substituindo as equações (1.57) e (1.59) na equação (1.54), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left\{ v \left[ \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} \right] + W \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right) - W \frac{N_{co} I_f}{S_f} - W \sigma \frac{U_m}{L} \right. \\ & \left. + v \left( B_{oy} \frac{\partial W}{\partial x} - B_{ox} \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right\} d\Omega - \oint_{\Gamma} W v \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma - \oint_{\Gamma} W v B_{ot} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (1.60)$$

Nesta equação tem-se dois termos de integração sobre a fronteira  $\Gamma$  do domínio  $\Omega$ . Deve-se, por tanto, aplicar as condições de contorno nas fronteiras deste domínio e nos limites de separação entre os meios.

a) **Condição de contorno de Dirichlet:** Nestas fronteiras são impostas as seguintes condições;  $\vec{A} = A_o$  e  $W=0$ , logo:

$$\oint_{\Gamma} W v \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (1.61)$$

b) **Condição de contorno de Neumann:** Nas fronteiras, a relação

$$v \frac{\partial A}{\partial n} = q_o$$

conduz a

$$\oint_{\Gamma} W v \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma = \oint_{\Gamma} W q_o d\Gamma \quad (1.62)$$

No limite de separação de dois meios, a integral é calculada sobre um contorno fechado envolvendo cada sub-domínio de  $\Omega$ :

$$\oint_{\Gamma} W v \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma = \oint_{\Gamma} W \left( v \frac{\partial A}{\partial n} \right)_1 d\Gamma - \oint_{\Gamma} W \left( v \frac{\partial A}{\partial n} \right)_2 d\Gamma$$

Pela condição de conservação da componente tangencial do campo magnético dada pela relação (1.28) e considerando-se que nenhum dos dois meios é imã permanente, a integral sobre a fronteira será nula:

$$\oint_{\Gamma} W v \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (1.63)$$

No caso de que um dos meios comporte imã permanente (o meio 2 por exemplo), a condição de conservação da componente tangencial do campo magnético é dada pela relação (1.30), pelo que a integral sobre a fronteira será:

$$\oint_{\Gamma} W v \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma = \oint_{\Gamma} -W v_2 B_{ot} d\Gamma \quad (1.64)$$

que por sua vez anula-se, com a segunda integral de linha da equação (1.60)

Finalmente, substituindo as condições de contorno (1.61) e (1.62) e as condições no limite de separação dos meios (1.63) e (1.64) na equação (1.60), obtém-se a expressão para a forma fraca do problema:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left\{ v \left[ \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} \right] + W \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right) - W \frac{N_{co} I_f}{S_f} - W \sigma \frac{U_m}{L} \right. \\ \left. + v \left( B_{oy} \frac{\partial W}{\partial x} - B_{ox} \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right\} d\Omega - \oint_{\Gamma} W q_o d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (1.65)$$

onde o termo  $\oint_{\Gamma} W q_o d\Gamma$  corresponde as condições não homogêneas de Neumann. Sendo as condições homogêneas, este termo será nulo.

### 1.6.2 Formulação por elementos finitos.

A resolução da equação (1.65) por métodos analíticos é praticamente impossível. O método de elementos finitos é uma técnica numérica que parte do princípio de que o domínio de estudo deve ser decomposto ou discretizado em pequenas regiões, chamadas de elementos finitos [2]. Neste trabalho são utilizados elementos finitos isoparamétricos triangulares de primeira ordem, como mostra a figura 1.6,

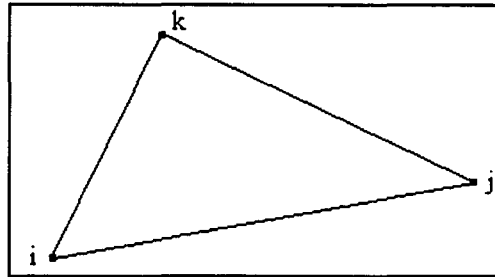


Figura 1.6 Elemento finito isoparamétrico triangular de primeira ordem

onde os pontos de encontro das arestas que compõem o elemento são chamados de nós. Na figura tem-se três nós i, j, k.

O potencial vetor magnético pode ser aproximado através de uma expansão em série finita:

$$\bar{A} = \sum_{m=i,j,k} \alpha_m A_m = N_e A_e \quad (1.66)$$

onde:

$A_e = [A_i \ A_j \ A_k]$  (potenciais vetor nos três nós do elemento e)

$N_e = [\alpha_i \ \alpha_j \ \alpha_k]$  (função de forma)

$\alpha_m = \frac{1}{2S_e} (a_m x + b_m y + c_m)$  sendo  $m=i, j, k$  os nós do elemento e

com:

$a_m, b_m, c_m$ : descrevem a variação linear da função, para o nó i tem-se

$$a_i = y_j - y_k$$

$$b_i = x_k - x_j$$

$$c_i = x_j y_k - x_k y_j$$

os termos  $a_m, b_m, c_m$  para os nós j, k são obtidos por permutação dos índices i, j, k.

$$S_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad \text{sendo } x_m, y_m \text{ as coordenadas dos vértices do triângulo e.}$$

$S_e$ : Dobro da área do triângulo (elemento e)

As derivadas parciais do potencial vetor  $\bar{A}$  podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{m=i,j,k} A_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial x} \\ \sum_{m=i,j,k} A_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial y} \end{bmatrix} = H_e A_e \quad (1.67)$$



onde:

$$[\mathbf{H}_e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_k}{\partial z} \\ \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} & \frac{\partial \alpha_k}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Após o particionamento do domínio em elementos finitos, a equação (1.65) transforma-se no somatório do cálculo das integrais em cada elemento:

$$\sum_e \left( \iint_{\Omega_e} \left\{ v \left[ \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} \right] + W \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right) - W \frac{N_{co} I_f}{S_f} - W \sigma \frac{U_m}{L} \right. \right. \\ \left. \left. + v \left( B_{oy} \frac{\partial W}{\partial x} - B_{ox} \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right\} d\Omega - \oint_{\Gamma_e} W q_o d\Gamma \right) = 0 \quad (1.68)$$

Quando o método de Galerkin é utilizado, escolhe-se as funções de forma como funções de ponderação do método residual [27]:

$$\mathbf{W}_e = \mathbf{N}_e^T \quad (1.69)$$

$$\mathbf{W}_{\Gamma_e} = \mathbf{N}_{\Gamma_e}^T \quad (1.70)$$

Substituindo as equações (1.66) e (1.67), que representam o potencial vetor e suas derivadas, e as equações (1.69) e (1.70) na equação (1.68), e considerando as condições de contorno de Neumann homogêneas, isto é, considerando a integral fechada em (1.68) nula, obtém-se:

$$\sum_e \left\{ \iint_{\Omega_e} \left( \frac{v}{2} \mathbf{H}_e^T \mathbf{H}_e dx dy \right) \mathbf{A}_e + \iint_{\Omega_e} \sigma \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e dx dy \frac{d\mathbf{A}_e}{dt} - \iint_{\Omega_e} \frac{N_{co} I_f}{S_f} \mathbf{N}_e^T dx dy \right. \\ \left. - \iint_{\Omega_e} \sigma \frac{U_m}{L} \mathbf{N}_e^T dx dy + \iint_{\Omega_e} v (B_{oy} \mathbf{a} - B_{ox} \mathbf{b}) dx dy \right\} = 0 \quad (1.71)$$

onde:

$$\mathbf{a}=[a_i \ a_j \ a_k]$$

$$\mathbf{b}=[b_i \ b_j \ b_k]$$

São definidas as seguintes matrizes elementares a partir da equação (1.71):

$$\mathbf{m}_e \equiv \iint_{\Omega_e} \frac{v}{2} \mathbf{H}_e^T \mathbf{H}_e dx dy \quad (1.72)$$

$$\mathbf{n}_e \equiv \iint_{\Omega_e} \sigma \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e dx dy \quad (1.73)$$

$$\mathbf{p}_e \equiv \iint_{\Omega_e} \frac{N_{co}}{S_f} \mathbf{N}_e^T dx dy \quad (1.74)$$

$$\mathbf{p}_e^l \equiv \iint_{\Omega_e} \frac{\sigma}{L} \mathbf{N}_e^T dx dy \quad (1.75)$$

$$\mathbf{d}_e \equiv \iint_{\Omega_e} v (B_{oy} \mathbf{a} - B_{ox} \mathbf{b}) dx dy \quad (1.76)$$

Discretiza-se agora o terceiro termo do lado direito da equação (1.50) para condutores finos. Utilizando as equações (1.50) e (1.69), tem-se para cada elemento:

$$\sum_e \frac{N_{co}}{S_f} L \iint_{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{N}_e \mathbf{A}_e dx dy$$

define-se assim:

$$\mathbf{q}_e \equiv \iint_{\Omega_e} \mathbf{N}_e \frac{N_{co}}{S_f} L dx dy \quad (1.77)$$

Discretizando o terceiro termo do lado direito da equação (1.49), condutores maciços, fazendo-se uso de (1.66) e (1.69)

$$\sum_e R_m \iint_{\Omega_e} \sigma \mathbf{N}_e \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} dx dy$$

define-se assim:

$$\mathbf{q}_e^l \equiv \iint_{\Omega_e} \mathbf{R}_m \sigma \mathbf{N}_e dx dy \quad (1.78)$$

Após efetuar a montagem de todas as matrizes elementares, obtêm-se o seguinte sistema matricial de equações:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{A} + \mathbf{N} \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \mathbf{P}\mathbf{I}_f - \mathbf{P}^l \mathbf{U}_m = \mathbf{D} \\ \mathbf{Q} \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{R}^l \mathbf{I}_m = \mathbf{U}_m \\ \mathbf{Q} \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{R}\mathbf{I}_f = \mathbf{U}_f \end{cases} \quad (1.79)$$

onde:

- $\mathbf{A}$  : Potencial vetor magnético nos nós da malha;
- $\mathbf{I}_f$  : Correntes nos condutores finos;
- $\mathbf{I}_m$  : Correntes nos condutores maciços;
- $\mathbf{U}_f$  : Tensão nos condutores finos;
- $\mathbf{U}_m$  : Tensão nos condutores maciços;
- $\mathbf{R}$  : Matriz das resistências dos enrolamentos finos (matriz diagonal);
- $\mathbf{R}^l$  : Matriz das resistências dos enrolamentos maciços (matriz diagonal).

Supondo que os condutores maciços são conectados entre si, e que esta ligação é um curto-circuito perfeito ( $\mathbf{U}_m=0$ ) e que apenas os condutores finos são alimentados por circuitos elétricos externos, a equação (1.79) torna a forma:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{A} + \mathbf{N} \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \mathbf{P}\mathbf{I} = \mathbf{D} \\ \mathbf{Q} \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{R}\mathbf{I} = \mathbf{U} \end{cases} \quad (1.80)$$

onde:

- $\mathbf{I}$  : Corrente no dispositivo eletromagnético alimentado por circuito elétrico externo

Considerando-se a indutância nas cabeças de bobina, acrescenta-se o termo  $LdI/dt$ , logo a equação (1.80) toma a sua forma final:

$$\begin{cases} MA + N \frac{d}{dt} A - PI = D \\ Q \frac{d}{dt} A + RI + L \frac{dI}{dt} = U \end{cases} \quad (1.81)$$

## 1.7 Conclusões

Foram apresentadas neste capítulo as equações que descrevem o comportamento de uma estrutura eletromagnética em duas dimensões. Supõe-se que os condutores maciços são conexos, e que a ligação entre eles é um curto-circuito perfeito, sendo que apenas os condutores finos são alimentados por circuitos elétricos externos. A indutância da cabeça de bobina também foi considerada.

A discretização espacial dos campos é feita utilizando o método de elementos finitos. Esta técnica numérica permite descrever o comportamento de dispositivos eletromagnéticos de modo preciso. As equações da estrutura eletromagnética resultantes, após a discretização, serão de grande importância para a resolução simultânea das equações de campo nestas estruturas e do circuito de alimentação exterior. No seguinte capítulo é apresentado o acoplamento destas equações.

## **Capítulo 2**

# **Formulação Matemática do Acoplamento de Conversores Estáticos com Estruturas Eletromagnéticas**

### **2.1 Introdução**

Neste capítulo é apresentado um método geral para o acoplamento de conversores estáticos com estruturas eletromagnéticas. A formulação para a estrutura eletromagnética está baseada no método dos elementos finitos, desenvolvida no capítulo 1. As equações para o conversor estático estão baseadas nos métodos da teoria de circuitos elétricos.

As equações de campo da estrutura eletromagnética são combinadas diretamente com as equações de estado do circuito do conversor. O acoplamento é realizado através de duas grandezas comuns à estrutura eletromagnética e ao conversor, que são a corrente nas estruturas eletromagnéticas e a tensão nos seus terminais. Para a simulação utiliza-se a resolução simultânea destas equações. As equações que descrevem este acoplamento são apresentadas.

O circuito do conversor estático pode conter interruptores, os quais mudam seus estados de acordo com a sua sequência de operação. A determinação das equações de estado do conversor é realizada para qualquer sequência de operação durante a simulação, de maneira automática, a partir da descrição topológica do circuito e sem conhecimento “a priori” desta sequência. Portanto, uma revisão do estudo topológico dos circuito é inicialmente apresentada.

## 2.2 Estudo topológico dos circuitos

Um grafo linear é formado por um conjunto de segmentos de reta, chamados braços, e um conjunto de pontos, chamados nós. Os braços são unidos pelos nós.

Um circuito elétrico pode ser associado a um grafo linear, onde cada elemento do circuito é substituído por um segmento de reta, ligado, através dos nós, aos outros elementos do circuito. Se forem transpostos, para o grafo do circuito, os sentidos de referência positivos adotados para as correntes, em todos os braços, passa-se a ter um grafo orientado (Figura 2.1) [20].

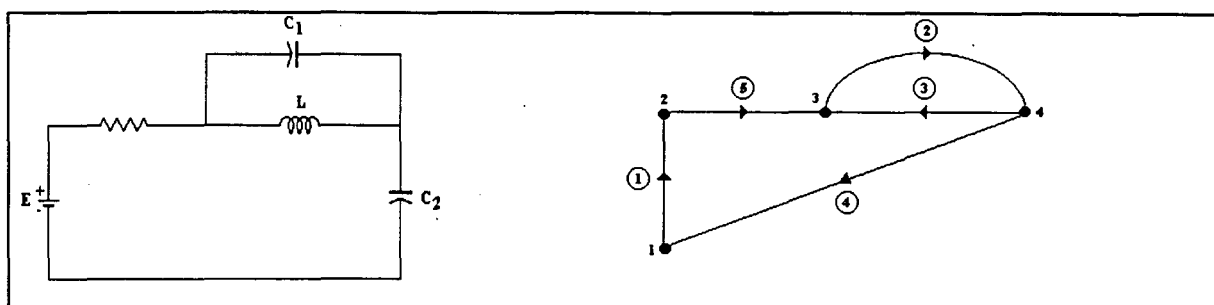


Figura 2.1 Circuito elétrico e seu grafo orientado associado

A orientação dos braços é escolhida de acordo com a convenção “gerador” para elementos ativos (fontes de tensão e de corrente) e convenção “receptor” para elementos passivos (resistores, capacitores, indutores) (Figura 2.2).

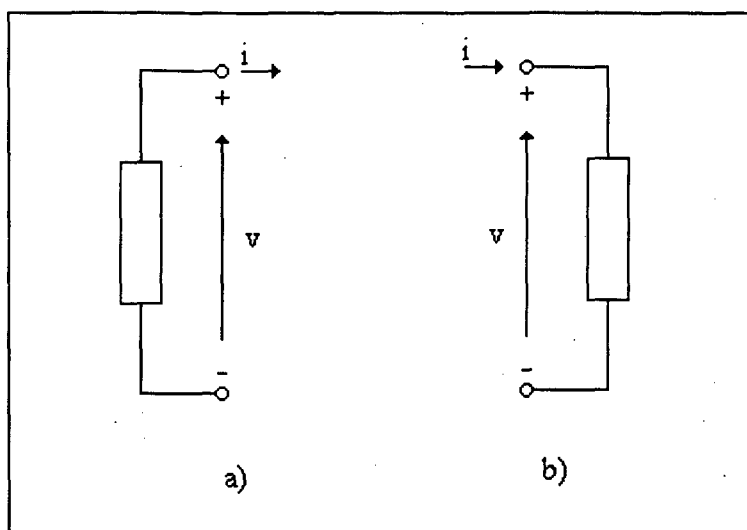


Figura 2.2 Convenção dos sinais nos elementos do circuito: a) convenção gerador; b) convenção receptor.

A partir do grafo orientado associado do circuito, pode-se extrair uma árvore, que é um sub-grafo orientado, que contém todos os nós do grafo inicial e um número de braços apenas suficiente para interligar todos os nós, mas sem formar um caminho fechado (laço). Todas as árvores têm o mesmo número de braços. A figura 2.3 apresenta um exemplo de árvore associada ao circuito elétrico da figura 2.1.

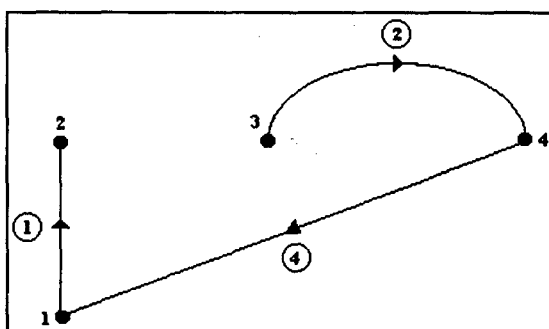


Figura 2.3 Árvore associada ao circuito elétrico

Escolhida a árvore, os braços que a ela pertencem são chamados ramos. Os braços que não pertencem a árvore são chamados de elos. Na figura 2.3, os braços 1, 2 e 4 são os ramos do circuito da figura 2.1 e os braços 3 e 5 são os elos. Seja:

$n$  : Número de nós do grafo;

$a$  : Número de braços.

O número de ramos é igual ao número de nós do grafo menos um ( $b=n-1$ ), e o número de elos é o número de braços de grafo menos o número de nós mais um ( $m=a-n+1$ ).

### 2.2.1 Matriz de cortes fundamentais

Um corte é um conjunto de braços tal, que a remoção de todos os braços do corte faz com que o grafo passe a ter duas partes separadas; além disso, removendo todos os braços do corte, menos um, o grafo obtido é conexo [20]. A reunião desses sub-grafos contém todos os nós do grafo. Exemplos de cortes para o circuito da figura 2.1 são mostrados na figura 2.4.

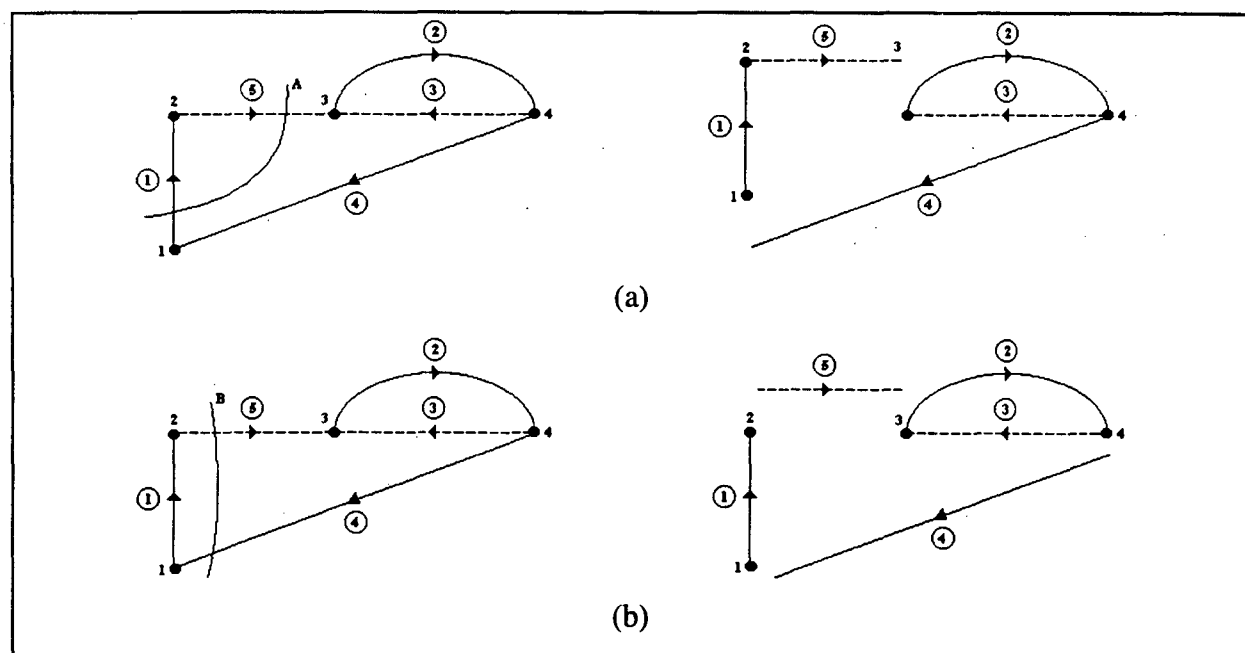


Figura 2.4 Exemplos de corte e dos sub-grafos resultantes



Nota-se que a soma das correntes nos braços que ligam dois sub-grafos é nula segundo a lei das correntes de Kirchhoff [1][6]. As correntes relativas aos braços dos sub-grafos se simplificam dois a dois.

Cada ramo, da árvore escolhida, junto com alguns (e possivelmente nenhum) elos formam um corte, chamado de corte fundamental para esse ramo. A orientação dos cortes fundamentais é arbitrariamente escolhida para coincidir com a orientação dos ramos que o caracterizam. O número de cortes fundamentais,  $n_{cf}$ , é igual ao número de nós menos um ( $n_{cf}=n-1$ ). Na figura 2.5 pode-se observar os cortes fundamentais para o circuito da figura 2.1.

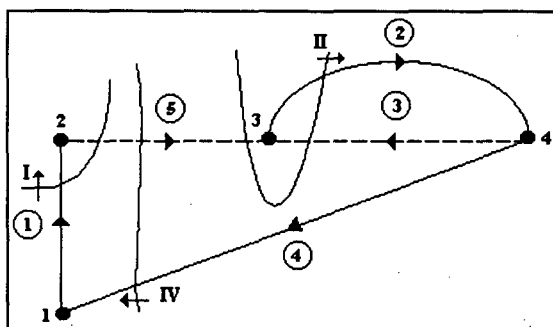


Figura 2.5 Cortes fundamentais I, II e IV

A matriz dos cortes fundamentais é uma matriz que descreve a presença dos braços num corte fundamental e a sua orientação relativa a esse corte. Define-se a matriz de cortes fundamentais  $k_{ij}$  cujas linhas correspondem aos cortes e as colunas aos braços do grafo. Os termos desta matriz são definidos como:

$$k_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o braço } j \text{ pertence ao corte fundamental } i \text{ com a mesma orientação;} \\ -1 & \text{se o braço } j \text{ pertence ao corte fundamental } i \text{ com orientação inversa;} \\ 0 & \text{se o braço } j \text{ não pertence ao corte fundamental.} \end{cases}$$

onde:

$$\text{Dim } \mathbf{K} = (n-1) \times a;$$

$n-1$  : Número de cortes fundamentais (número de ramos).

A matriz de cortes fundamentais  $\mathbf{K}$  pode ser dividida em duas sub-matrizes considerando primeiro os ramos e depois os elos:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2] \quad (2.1)$$

onde as dimensões das matrizes  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  são:

$$\text{Dim } \mathbf{K}_1 = (n-1) \times (n-1);$$

$$\text{Dim } \mathbf{K}_2 = (n-1) \times (a-n+1).$$

Para o caso do circuito da figura 2.1, a matriz de cortes fundamentais é dada por:

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{IV} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A lei das correntes de Kirchhoff, estabelece que a soma das correntes num nó é sempre zero. Uma forma mais geral desta lei estabelece que a soma de todas as correntes num corte é sempre zero [1][6]. Logo:

$$\mathbf{K} \cdot [\mathbf{i}] = [0]$$

$$[\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_b \\ \mathbf{i}_m \end{bmatrix} = [0]$$

$$\mathbf{K}_1[\mathbf{i}_b] = -\mathbf{K}_2[\mathbf{i}_m] \quad (2.2)$$

Por definição, a matriz  $\mathbf{K}_1$  é a matriz identidade, então a expressão (2.2) fica igual a:

$$[\mathbf{i}_b] = -\mathbf{K}_2[\mathbf{i}_m] \quad (2.3)$$

onde:

$i_b$  : Matriz das correntes nos ramos da árvore;

$i_m$  : Matriz das correntes nos elos.

### 2.2.2 Matriz de laços fundamentais

O laço de um grafo é uma trajetória fechada, construída com braços do grafo e passando uma vez só em cada nó. É evidente que uma árvore não possui nenhum laço.

Dado um grafo, é escolhida uma árvore e são removidos todos os elos. Em seguida, é reposto cada elo no grafo, um por vez. Assim que cada elo é reposto, formará um laço. Este laço será caracterizado pelo fato de que todos, menos um dos seus braços, são ramos da árvore escolhida. Os laços formados deste modo serão chamados de laços fundamentais [6]. A orientação de um laço fundamental é arbitrariamente escolhida para coincidir com orientação do elo que o caracteriza. O número de laços fundamentais,  $n_{lf}$ , será igual ao número de braços do grafo menos o número de nós mais um ( $n_{lf} = a - n + 1$ ). O número de laços fundamentais é igual ao número de elos do grafo. A figura 2.6 mostra os laços fundamentais do grafo da figura 2.1.

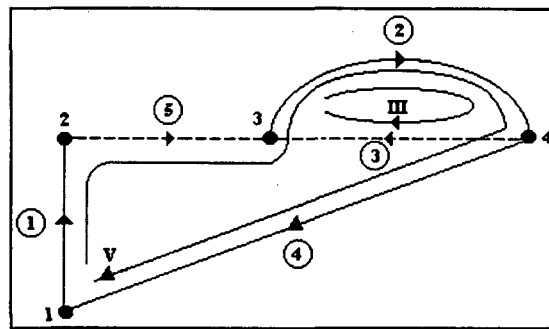


Figura 2.6 Laços fundamentais III e V

Define-se assim a matriz dos laços fundamentais  $b_{ij}$  cujas linhas correspondem aos laços e as colunas aos braços do grafo. Os termos desta matriz são definidos como:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o braço } j \text{ pertence ao laço fundamental } i \text{ com a mesma orientação;} \\ -1 & \text{se o braço } j \text{ pertence ao laço fundamental } i \text{ com orientação contrária;} \\ 0 & \text{se o braço } j \text{ não pertence ao laço fundamental.} \end{cases}$$

onde:

$$\text{Dim } \mathbf{B} = (a-n+1) \times a;$$

$a-n+1$  : Número de laços fundamentais (número de elos).

A matriz de laços fundamentais  $\mathbf{B}$  pode ser dividida em duas sub-matrizes considerando primeiro os ramos e depois os elos:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2] \quad (2.4)$$

onde as dimensões das matrizes  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_2$  são:

$$\text{Dim } \mathbf{B}_1 = (a-n+1) \times (n-1);$$

$$\text{Dim } \mathbf{B}_2 = (a-n+1) \times (a-n+1).$$

Para o caso do circuito da figura 2.1, a matriz de laços fundamentais é dada por:

$$\begin{matrix} \mathbf{III} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{V} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A lei das tensões de Kirchhoff, estabelece que a soma das tensões num laço fechado é sempre zero [1][6]. Logo:

$$\mathbf{B} \cdot [\mathbf{v}] = [0]$$

$$[\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_b \\ \mathbf{v}_m \end{bmatrix} = [0]$$

$$\mathbf{B}_1[\mathbf{v}_b] = -\mathbf{B}_2[\mathbf{v}_m] \quad (2.5)$$

Por definição, a matriz  $B_2$  é a matriz identidade, pelo que (2.5) fica como:

$$[v_m] = -B_1[v_b] \quad (2.6)$$

onde:

$v_m$  : Matriz das tensões nos elos;

$v_b$  : Matriz das tensões nos ramos.

### 2.2.3 Matriz de incidência

Do grafo do circuito é possível construir uma matriz que expresse a posição dos braços em relação aos nós. Esta matriz, chamada de matriz de incidência, é definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o braço } j \text{ sai do nó } i; \\ -1 & \text{se o braço } j \text{ entra no nó } i; \\ 0 & \text{se o braço } j \text{ não é incidente com o nó } i. \end{cases}$$

onde:

Dim  $A = n \times a$ ;

Para o caso do circuito da figura 2.1 em estudo, a matriz de incidência é dada por:

$$\begin{array}{l} \text{nó 1} \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \\ \text{nó 2} \left[ \begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \text{nó 3} \left[ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right] \\ \text{nó 4} \left[ \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Pode-se observar que para cada coluna tem-se os valores +1 ou -1. Esta é uma propriedade geral para qualquer grafo linear porque cada braço é incidente em exatamente dois nós. O número de termos não nulos de uma linha indica, para cada nó, o número de braços que saem ou entram neste nó. Cada linha deverá ter no mínimo dois termos não nulos, senão isto significa que existe um braço com um dos seus terminais não conectados [1].

### 2.2.4 Relação entre as matrizes $K_2$ e $B_1$

A matriz de cortes fundamentais  $K_2$  expressa a relação que existe entre a orientação do ramo que caracteriza o corte e os elos que pertencem ao corte. Do mesmo modo, a matriz de laços fundamentais  $B_1$  expressa a relação entre a orientação do elo que caracteriza o laço e os ramos que pertencem ao laço.

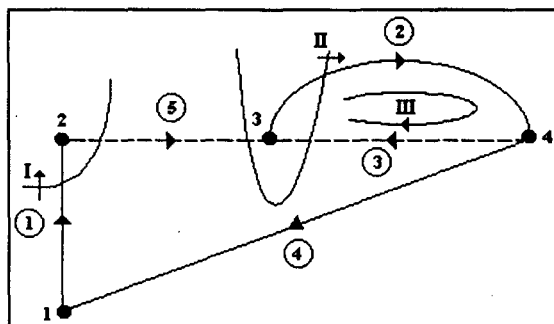


Figura 2.7 Relação entre as matrizes  $K_2$  e  $B_1$

A figura 2.7 mostra os cortes fundamentais I e II e o laço fundamental III do circuito da figura 2.1, utilizado aqui para ilustrar a relação entre as matrizes  $K_2$  e  $B_1$ . Três casos podem ser apresentados:

- Caso 1. O ramo 1 não pertence ao laço fundamental III, portanto o termo  $b_{31}$  é nulo. O corte fundamental I não pode cortar o elo 3, sem cortar outros braços, assim o termo  $k_{13}$  é nulo.
- Caso 2. O ramo 2 tem a mesma orientação que o laço fundamental III, portanto o termo da matriz  $b_{32}=1$ . O ramo 2 caracteriza o corte fundamental II, a orientação do elo 3 é contrária à orientação do corte fundamental II, então o termo  $k_{23} = -1$ .
- Caso 3. Considere-se por um instante que o ramo 2 tem orientação oposta à mostrada na figura 2.7. Nesse caso o laço fundamental III terá orientação oposta ao ramo 2, portanto o termo da matriz  $b_{32} = -1$ . O elo 3 terá a mesma orientação ao corte fundamental II, então o termo  $k_{23} = 1$ .

Conclui-se portanto que:

$$k_{ji} = -b_{ij}$$

Assim:

$$B_1 = -K_2^T \quad (2.7)$$

O equacionamento automático de um circuito está ligado com a determinação da matriz  $K_2$  ou  $B_1$ . A matriz  $K_2$  pode ser determinada a partir da matriz de incidência utilizando o algoritmo de Welsch [23]. Esta matriz é facilmente obtida numericamente se cada braço é definido por seu nó de partida e por seu nó de chegada.

### 2.2.5 Algoritmo de Welsch

Seja  $A$  a matriz de incidência de um circuito dado. Para cada coluna  $j$  de  $A$ , considera-se o primeiro elemento não nulo  $a_{ij}$  tal que nenhum outro elemento da linha  $i$  tenha sido escolhido nas linhas anteriores. Se este elemento existe, marca-se a coluna  $j$  com o valor da linha  $i$ , senão o zero é atribuído a esta coluna.

Todas as linhas com elemento não nulo na coluna  $j$  são trocadas pela sua soma ou diferença com a linha  $i$ , de modo que  $a_{ij}$  seja o único elemento não nulo na coluna  $j$ . Esta operação é repetida até que a última linha da matriz  $A$  é zerada [11][23].

Os ramos correspondem às colunas com um elemento não nulo. A árvore é obtida tomando as colunas marcadas com um valor diferente de zero. A seguir as colunas são selecionadas colocando primeiro os ramos e logo os elos. A matriz encontrada,  $A'$  tem a forma seguinte:

$$A' = [A'_1 \quad A'_2] \quad (2.8)$$

onde:

$\text{Dim } A'_1 = (n-1) \times (n-1)$  (ramos);

$\text{Dim } A'_2 = (a-n+1) \times (n-1)$  (elos).

A matriz  $K_2$  é obtida a partir da seguinte expressão:

$$K_2 = A'^T_1 \times A'_2 \quad (2.9)$$

Para maior clareza na aplicação deste algoritmo, consideremos o circuito da figura 2.1.  
Sua matriz de incidência é:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Primeiro passo: O primeiro termo não nulo da coluna 1 está na linha 1, o braço 1 é um ramo.

Os outros termos não nulos na coluna 1 são anulados pela soma:

$$\text{linha2} = \text{linha2} + \text{linha1}$$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Segundo passo: O primeiro termo não nulo da coluna 2 está na linha 3, o braço 2 é um ramo.

Anulam-se os termos não nulos restante pela soma:



$$\text{linha4}=\text{linha4}+\text{linha3}$$

$$A = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Terceiro passo: Na coluna 3 não há termos não nulos que ainda não tenham sido considerados, o braço 3 é um elo.

Quarto passo: primeiro termo não nulo da coluna 4 está na linha 2, o braço 4 é um ramo.

Anulam-se os outros termos não nulos com as seguintes operações:

$$\text{linha1}=\text{linha1}-\text{linha2}$$

$$\text{linha4}=\text{linha4}+\text{linha2}$$

$$A = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo a última linha nula, ordenam-se as colunas da matriz A considerando primeiro os ramos e depois os elos.

$$A' = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$   
 $A'_1$

$\underbrace{\hspace{10em}}$   
 $A'_2$

A matriz de cortes  $K_2$  é obtida utilizando a equação (2.9), resultando em,

$$K_2 = A'^T_1 \times A'_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e a matriz de laços é achada a partir da matriz de cortes segundo a equação (2.7)

$$\mathbf{B}_1 = -\mathbf{K}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode-se observar que as matrizes  $\mathbf{K}_2$  e  $\mathbf{B}_1$ , obtidas a partir do grafo, são idênticas às matrizes obtidas a partir da matriz de incidência utilizando o algoritmo de Welsch.

### 2.3 Representação por variáveis de estado do circuito exterior de alimentação

As variáveis de estado de um sistema são um conjunto de variáveis cujo conhecimento, em qualquer instante  $t$ , é suficiente para determinar o estado do sistema. As variáveis de estado estão relacionadas com elementos armazenadores de energia.

A tensão no capacitor e a corrente no indutor são escolhidas como variáveis de estado do sistema. Topologicamente, é desejável ter o maior número de capacitores na árvore do circuito. Da mesma maneira, o maior número de indutores devem ficar fora da árvore [1].

Das equações (2.3) e (2.6) pode-se perceber que, as variáveis de estado deverão ser as tensões nos capacitores de ramo da árvore e as correntes nos indutores de elo [1][6].

A equação diferencial geral de um circuito elétrico conectado a uma estrutura eletromagnética é dada por [15][26]:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{G}_1\mathbf{X} + \mathbf{G}_2\mathbf{E} + \mathbf{G}_3\mathbf{I} \quad (2.10)$$

onde:

**X** : Variáveis de estado (tensão nos capacitores de ramo e corrente nos indutores de elo);

**E** : Matriz das tensões e correntes de alimentação;

**I** : Matriz das correntes no dispositivo eletromagnético conectado ao circuito;

**G<sub>1</sub>, G<sub>2</sub>, G<sub>3</sub>** : Matrizes que dependem da topologia do circuito elétrico.

A tensão no dispositivo eletromagnético pode ser calculada a partir de (2.10), resultando na seguinte relação [26]:

$$\mathbf{U} = \mathbf{G}_4 \mathbf{X} + \mathbf{G}_5 \mathbf{E} + \mathbf{G}_6 \mathbf{I} \quad (2.11)$$

onde:

**G<sub>4</sub>, G<sub>5</sub>, G<sub>6</sub>** : Matrizes que dependem da topologia do circuito elétrico.

## 2.4 Associação das equações do campo e do circuito de alimentação

Para a simulação de estruturas eletromagnéticas alimentadas por circuitos exteriores, é utilizada uma resolução simultânea das equações do campo e do circuito [15]. Na figura 2.8 é mostrada uma representação do conjunto conversor/estrutura eletromagnética. Pode-se notar que as grandezas comuns a ambos são a corrente **I** e a tensão **U**.

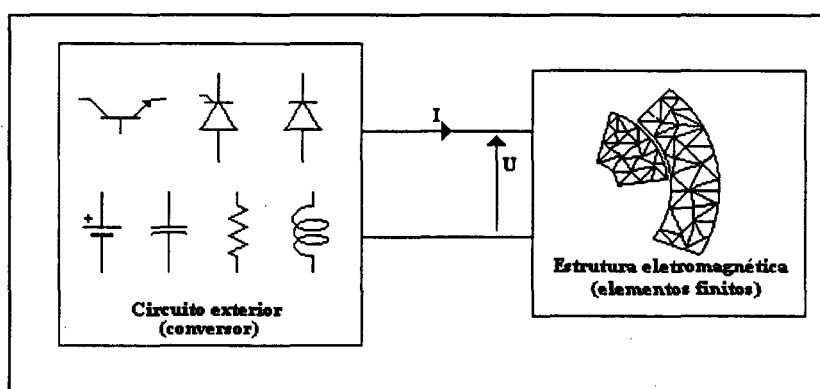


Figura 2.8 Associação conversor/estrutura eletromagnética

Na modelagem do conjunto conversor/estrutura eletromagnética, a corrente nos enrolamentos da estrutura eletromagnética é desconhecida. Esta corrente pode ser calculada a partir da equação (1.81), obtida da resolução das equações de Maxwell pelo método dos elementos finitos. A tensão nos terminais dos enrolamentos da estrutura eletromagnética, vista do lado da máquina, segundo a figura 2.8, é também dada pela equação (1.81) relembra a seguir.

$$\begin{cases} \mathbf{MA} + \mathbf{N} \frac{d}{dt} \mathbf{A} - \mathbf{PI} = \mathbf{D} \\ \mathbf{Q} \frac{d}{dt} \mathbf{A} + \mathbf{RI} + \mathbf{L} \frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{U} \end{cases} \quad (1.81)$$

A tensão nos terminais dos enrolamentos vista do lado do conversor, segundo a figura 2.8, é dada pela equação (2.11). É através desta equação que é efetuado o acoplamento entre a estrutura eletromagnética e o circuito de alimentação.

Sendo a corrente nos enrolamentos da estrutura eletromagnética desconhecida, a tensão  $\mathbf{U}$  será comum à estrutura e ao conversor, portanto, combinando a equação (2.11) com a segunda equação de (1.81) obtemos um sistema geral de equações do conjunto estrutura eletromagnética/circuito exterior de alimentação [12]:

$$\begin{cases} \mathbf{MA} + \mathbf{N} \frac{d}{dt} \mathbf{A} - \mathbf{PI} = \mathbf{D} \\ \mathbf{Q} \frac{d}{dt} \mathbf{A} + [\mathbf{R} - \mathbf{G}_6] \mathbf{I} + \mathbf{L} \frac{d\mathbf{I}}{dt} - \mathbf{G}_4 \mathbf{X} = \mathbf{G}_5 \mathbf{E} \\ \frac{d}{dt} \mathbf{X} - \mathbf{G}_1 \mathbf{X} - \mathbf{G}_3 \mathbf{I} = \mathbf{G}_2 \mathbf{E} \end{cases} \quad (2.12)$$

onde:

$\mathbf{M}$  : Matriz de permeabilidade;

**A** : Potencial vetor nos nós da malha;  
**N** : Matriz de condutividade;  
**P** : Matriz que relaciona a corrente no elemento aos nós do elemento;  
**D** : Vetor de excitação induzida por ímãs permanentes;  
**Q** : Enlace de fluxo nos enrolamentos;  
**L** : Indutâncias nas cabeças de bobina;  
**R** : Resistência dos enrolamentos;  
**E** : Fontes de tensão e corrente no circuito elétrico;  
**I** : Corrente nos enrolamentos;  
**X** : Variáveis de estado do circuito de alimentação;  
**G<sub>1</sub>-G<sub>6</sub>** : Matriz que dependem da topologia do circuito.

As incógnitas, na equação (2.12), são: o potencial vetor magnético **A** na malha de elementos finitos; a corrente **I** nos enrolamentos da estrutura eletromagnética e o vetor de variáveis de estado **X** do circuito de alimentação.

O sistema de equações (2.12) é um sistema de equações no tempo. Utiliza-se o esquema de recorrência de Euler para discretizar as derivadas temporais das equações, para a sua resolução passo a passo, mostrado a seguir [13]:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (2.13)$$

Isto equivale a fazer uma aproximação do tipo diferença finita de primeira ordem. O sistema de equações (2.12) resulta em:



$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{i}_j \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{I} = [\mathbf{i}_{mi}] \quad (2.18)$$

onde:

$\mathbf{v}_{bc}$  : Tensão nos capacitores de ramo;

$\mathbf{i}_{ml}$  : Corrente nos indutores de elo;

$\mathbf{v}_e$  : Fontes de tensão;

$\mathbf{i}_j$  : Fontes de corrente;

$\mathbf{i}_{mi}$  : Corrente nos enrolamentos da estrutura eletromagnética.

Note-se que a primeira letra do sub-índice da variável de estado (b ou m) indica uma grandeza de ramo (b) ou de elo (m), e a segunda letra do sub-índice (c, l, j, etc.) corresponde a um elemento do circuito.

#### 2.4.1 Determinação das matrizes $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_6$

Utilizando (2.16), (2.17) e (2.18), as equações (2.10) e (2.11) também podem ser escritas na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{bc} \\ \mathbf{i}_{ml} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{bc} \\ \mathbf{i}_{ml} \end{bmatrix} + \mathbf{G}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{i}_j \end{bmatrix} + \mathbf{G}_3 [\mathbf{i}_{mi}] \quad (2.19)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{G}_4 \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{bc} \\ \mathbf{i}_{ml} \end{bmatrix} + \mathbf{G}_5 \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{i}_j \end{bmatrix} + \mathbf{G}_6 [\mathbf{i}_{mi}] \quad (2.20)$$

Para a determinação das matrizes  $\mathbf{G}_1$  a  $\mathbf{G}_6$  são utilizadas as equações (2.3) e (2.6) que expressam as leis das correntes e tensões de Kirchhoff respectivamente. A equação (2.7) que relaciona as matrizes  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  também é utilizada. A matriz  $\mathbf{B}_1$  é calculada a partir da matriz de incidência usando o algoritmo de Welsch.

A seleção da árvore normal do circuito tem a seguinte ordem de preferência para os ramos: fontes de tensão (e), capacitores (c), resistores (r), indutores (l), enrolamentos da estrutura eletromagnética (i) e fontes de corrente(j). Isto garante a unicidade da árvore escolhida [24]. A construção da árvore do grafo permite ligar as tensões de elo com as tensões de ramo a partir de:

$$\begin{bmatrix} v_{mc} \\ v_{mr} \\ v_{ml} \\ v_{mi} \\ v_j \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_6 & S_7 & S_8 & S_9 & S_{10} \\ S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{16} & S_{17} & S_{18} & S_{19} & S_{20} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_e \\ v_{bc} \\ v_{br} \\ v_{bl} \\ v_{bi} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

e as corrente de ramo com as correntes de elo a partir de:

$$\begin{bmatrix} i_e \\ i_{bc} \\ i_{br} \\ i_{bl} \\ i_{bi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^T & S_6^T & S_{11}^T & S_{16}^T & S_{21}^T \\ S_2^T & S_7^T & S_{12}^T & S_{17}^T & S_{22}^T \\ S_3^T & S_8^T & S_{13}^T & S_{18}^T & S_{23}^T \\ S_4^T & S_9^T & S_{14}^T & S_{19}^T & S_{24}^T \\ S_5^T & S_{10}^T & S_{15}^T & S_{20}^T & S_{25}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{mc} \\ i_{mr} \\ i_{ml} \\ i_{mi} \\ i_j \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Algumas considerações permitem simplificar as equações (2.21) e (2.22) [15]:

- Na construção da árvore normal, os capacitores e as fontes de tensão têm prioridade para serem considerados ramos. Se um capacitor fosse um elo, a tensão nos seus terminais é calculada em função das fontes de tensão e das tensões nos terminais dos capacitores de ramo, então  $S_3$ ,  $S_4$  e  $S_5$  devem ser nulas.
- Da mesma forma, os indutores, as fontes de corrente e os enrolamentos têm prioridade para serem elos. Se um indutor for um ramo, sua corrente é calculada em função das fontes de corrente, as correntes nos outros indutores e a corrente nos enrolamentos da estrutura eletromagnética. Logo,  $S_4^T$  e  $S_5^T$  são nulos.
- A corrente nos enrolamentos da estrutura eletromagnética, é calculada em função das fontes de corrente e da corrente nos outros enrolamentos. Neste caso,  $S_5^T$ ,  $S_{10}^T$  e  $S_{15}^T$  são nulos.



- A estrutura eletromagnética é alimentada por um circuito exterior. Não é possível ter laços contendo somente fontes de tensão e capacitores, então  $S_1$  deve ser nulo. Também não é possível ter cortes contendo só fontes de corrente e indutores, logo  $S_{19}$  e  $S_{24}$  são nulos.

Levando em conta estas considerações, os sistemas matriciais (2.21) e (2.22), tomam a forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{mc} \\ \mathbf{v}_{mr} \\ \mathbf{v}_{ml} \\ \mathbf{v}_{mi} \\ \mathbf{v}_j \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{S}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_6 & \mathbf{S}_7 & \mathbf{S}_8 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} & \mathbf{S}_{14} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{16} & \mathbf{S}_{17} & \mathbf{S}_{18} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{20} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{v}_{bc} \\ \mathbf{v}_{br} \\ \mathbf{v}_{bl} \\ \mathbf{v}_{bi} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_{bc} \\ \mathbf{i}_{br} \\ \mathbf{i}_{bl} \\ \mathbf{i}_{bi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{S}_6^T & \mathbf{S}_{11}^T & \mathbf{S}_{16}^T & \mathbf{S}_{21}^T \\ \mathbf{S}_2^T & \mathbf{S}_7^T & \mathbf{S}_{12}^T & \mathbf{S}_{17}^T & \mathbf{S}_{22}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_8^T & \mathbf{S}_{13}^T & \mathbf{S}_{18}^T & \mathbf{S}_{23}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{14}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{20}^T & \mathbf{S}_{25}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{mc} \\ \mathbf{i}_{mr} \\ \mathbf{i}_{ml} \\ \mathbf{i}_{mi} \\ \mathbf{i}_j \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

As relações tensão/corrente para cada tipo de componente são definidas da seguinte forma:

a) Para resistores

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{br} \\ \mathbf{v}_{mr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{br} \\ \mathbf{i}_{mr} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

onde  $\mathbf{R}_1$  é a sub-matriz dos resistores de ramo e  $\mathbf{R}_2$  é a sub-matriz dos resistores de elo, definidas como:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} r_1^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_n^* \end{bmatrix}$$

b) Para capacitores

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{bc} \\ \mathbf{i}_{mc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{bc} \\ \mathbf{v}_{mc} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

onde  $\mathbf{C}_1$  é a sub-matriz dos capacitores de ramo e  $\mathbf{C}_2$  é a sub-matriz dos capacitores de elo, sendo definidas como:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} c_1^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_n^* \end{bmatrix}$$

c) Para indutores

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{bl} \\ \mathbf{v}_{ml} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{M}_u \\ \mathbf{M}_u^T & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{bl} \\ \mathbf{i}_{ml} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

onde  $\mathbf{L}_1$  é a sub-matriz dos indutores de ramo e  $\mathbf{L}_2$  é a sub-matriz dos indutores de elo e  $\mathbf{M}_u$  a sub-matriz das indutâncias mútuas entre indutores de elo e indutores de ramo. Estas matrizes são definidas como:

$$\mathbf{M}_u = [m_{ij}] \quad \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} l_1 & m & \cdots & m \\ m & \ddots & m & \vdots \\ \vdots & m & \ddots & m \\ m & \cdots & m & l_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} l_1^* & m^* & \cdots & m^* \\ m^* & \ddots & m^* & \vdots \\ \vdots & m^* & \ddots & m^* \\ m^* & \cdots & m^* & l_n^* \end{bmatrix}$$

Com as relações apresentadas até aqui, é possível construir automaticamente as equações de estado de qualquer circuito elétrico que alimenta uma estrutura eletromagnética e a tensão nos enrolamentos desta estrutura.

#### 2.4.1.1 Cálculo de $G_1$ , $G_2$ e $G_3$

As matrizes  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$  são calculadas de acordo com a equação (2.19). A derivada das variáveis de estado,  $dv_{bc}/dt$  e  $di_{ml}/dt$ , deve ser escrita em função das variáveis de estado,  $v_{bc}$  e  $i_{ml}$ , das fontes  $v_e$  e  $i_j$  e da corrente nos enrolamentos  $i_{mi}$ . Das equações (2.24) e (2.26) temos que:

$$\mathbf{i}_{bc} = \mathbf{C}_1 \frac{d\mathbf{v}_{bc}}{dt} = \mathbf{S}_2^T \mathbf{i}_{mc} + \mathbf{S}_7^T \mathbf{i}_{mr} + \mathbf{S}_{12}^T \mathbf{i}_{ml} + \mathbf{S}_{17}^T \mathbf{i}_{mi} + \mathbf{S}_{22}^T \mathbf{i}_j \quad (2.28)$$

sendo que  $\mathbf{i}_{mc}$  e  $\mathbf{i}_{mr}$  devem ser expressadas em função das variáveis de estado. Utilizando as equações (2.23) e (2.26),  $\mathbf{i}_{mc}$  pode ser escrito como:

$$\mathbf{i}_{mc} = -\mathbf{C}_2 \mathbf{S}_2 \frac{d\mathbf{v}_{bc}}{dt} \quad (2.29)$$

e  $\mathbf{i}_{mr}$  é calculado de (2.23), (2.24) e (2.26), obtendo-se:

$$\mathbf{R}_2 \mathbf{i}_{mr} = -\mathbf{S}_6 \mathbf{v}_e - \mathbf{S}_7 \mathbf{v}_{bc} - \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 (\mathbf{S}_8^T \mathbf{i}_{mr} + \mathbf{S}_{13}^T \mathbf{i}_{ml} + \mathbf{S}_{18}^T \mathbf{i}_{mi} + \mathbf{S}_{23}^T \mathbf{i}_j) \quad (2.30)$$

Definimos:

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{I} + \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \quad (2.31)$$

e substituindo em (2.30) obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{mr} = & -\mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 \mathbf{v}_{bc} - \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T \mathbf{i}_{ml} - \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 \mathbf{v}_e \\ & - \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T \mathbf{i}_{mi} - \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T \mathbf{i}_j \end{aligned} \quad (2.32)$$

Substituindo (2.29) e (2.32) na equação (2.28) e definindo

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{C}_1 + \mathbf{S}_2^T \mathbf{C}_2 \mathbf{S}_2$$

obtem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_{bc}}{dt} = & -\mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{S}_7^T \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 \mathbf{v}_{bc} + \mathbf{T}_1^{-1} (\mathbf{S}_{12}^T - \mathbf{S}_7^T \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T) \mathbf{i}_{ml} \\ & - \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{S}_7^T \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 \mathbf{v}_e + \mathbf{T}_1^{-1} (\mathbf{S}_{17}^T - \mathbf{S}_7^T \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T) \mathbf{i}_{mi} \\ & + \mathbf{T}_1^{-1} (\mathbf{S}_{22}^T - \mathbf{S}_7^T \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T) \mathbf{i}_j \end{aligned} \quad (2.33)$$

Para o cálculo de  $d\mathbf{i}_{ml}/dt$  utiliza-se as equações (2.23) e (2.27), das quais são obtidas:

$$\mathbf{L}_2 \frac{d\mathbf{i}_{ml}}{dt} + \mathbf{M}_u^T \frac{d\mathbf{i}_{bl}}{dt} = -\mathbf{S}_{11} \mathbf{v}_e - \mathbf{S}_{12} \mathbf{v}_{bc} - \mathbf{S}_{13} \mathbf{v}_{br} - \mathbf{S}_{14} \mathbf{v}_{bl} \quad (2.34)$$

onde  $\mathbf{i}_{bl}$ ,  $\mathbf{v}_{br}$  e  $\mathbf{v}_{bl}$  devem ser expressos em função das variáveis de estado. De (2.24), pode-se escrever:

$$\frac{d\mathbf{i}_{bl}}{dt} = \mathbf{S}_{14}^T \frac{d\mathbf{i}_{ml}}{dt} \quad (2.35)$$

de onde  $\mathbf{v}_{bl}$  é obtida combinando (2.27) e (2.35).

De (2.24) e (2.25), tem-se:

$$\mathbf{v}_{br} = \mathbf{R}_1 (\mathbf{S}_8^T \mathbf{i}_{mr} + \mathbf{S}_{13}^T \mathbf{i}_{ml} + \mathbf{S}_{18}^T \mathbf{i}_{mi} + \mathbf{S}_{23}^T \mathbf{i}_j) \quad (2.36)$$

e de (2.23) e (2.24),

$$\mathbf{i}_{mr} = \mathbf{R}_2^{-1} (-\mathbf{S}_6 \mathbf{v}_e - \mathbf{S}_7 \mathbf{v}_{bc} - \mathbf{S}_8 \mathbf{v}_{br}) \quad (2.37)$$

Definindo:

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{I} + \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \quad (2.38)$$

substituindo (2.37) em (2.36) e levando em conta (2.38) obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{br} = & -\mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 \mathbf{v}_{bc} + \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T \mathbf{i}_{ml} \\ & - \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 \mathbf{v}_e + \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T \mathbf{i}_j \\ & + \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T \mathbf{i}_{mi} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Seja,

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{L}_2 + \mathbf{S}_{14} \mathbf{L}_1 \mathbf{S}_{14}^T + \mathbf{M}_u^T \mathbf{S}_{14}^T + \mathbf{S}_{14} \mathbf{M}_u \quad (2.40)$$

substituindo (2.35) e (2.39) em (2.34) temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}_{ml}}{dt} = & \mathbf{T}_2^{-1} (\mathbf{S}_{13} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 - \mathbf{S}_{12}) \mathbf{v}_{bc} + \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{S}_{13} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T \mathbf{i}_{ml} \\ & + \mathbf{T}_2^{-1} (\mathbf{S}_{13} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 - \mathbf{S}_{11}) \mathbf{v}_e - \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{S}_{13} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T \mathbf{i}_{mi} \\ & - \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{S}_{13} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T \mathbf{i}_j \end{aligned} \quad (2.41)$$

As equações (2.33) e (2.41) escritas na forma matricial resultam em:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{v}_{bc}}{dt} \\ \frac{d\mathbf{i}_{ml}}{dt} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{S}_7^T \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 & \mathbf{T}_1^{-1} (\mathbf{S}_{12}^T - \mathbf{S}_7^T \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T) \\ \mathbf{T}_2^{-1} (\mathbf{S}_{13} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 - \mathbf{S}_{12}) & -\mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{S}_{13} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{bc} \\ \mathbf{i}_{ml} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{S}_7^T \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 & \mathbf{T}_1^{-1} (\mathbf{S}_{17}^T - \mathbf{S}_7^T \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T) \\ \mathbf{T}_2^{-1} (\mathbf{S}_{13} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 - \mathbf{S}_{11}) & -\mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{S}_{13} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{i}_{mi} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^{-1} (\mathbf{S}_{22}^T - \mathbf{S}_7^T \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T) \\ -\mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{S}_{13} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Finalmente, as matrizes  $\mathbf{G}_1$  a  $\mathbf{G}_3$  são obtidas de (2.42) segundo a forma dada pela equação (2.19), resultando em:

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{S}_7^T \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 & \mathbf{T}_1^{-1} (\mathbf{S}_{12}^T - \mathbf{S}_7^T \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T) \\ \mathbf{T}_2^{-1} (\mathbf{S}_{13} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 - \mathbf{S}_{12}) & -\mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{S}_{13} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{S}_7^T \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 & \mathbf{T}_1^{-1} (\mathbf{S}_{17}^T - \mathbf{S}_7^T \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T) \\ \mathbf{T}_2^{-1} (\mathbf{S}_{13} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 - \mathbf{S}_{11}) & -\mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{S}_{13} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^{-1} (\mathbf{S}_{22}^T - \mathbf{S}_7^T \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T) \\ -\mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{S}_{13} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

#### 2.4.1.2 Cálculo de $\mathbf{G}_4$ $\mathbf{G}_5$ e $\mathbf{G}_6$

As matrizes  $\mathbf{G}_4$   $\mathbf{G}_5$  e  $\mathbf{G}_6$  são calculadas de acordo com a equação (2.20). A tensão  $U$ , nos enrolamentos da estrutura eletromagnética, deve ser escrita em função das variáveis de estado,  $v_{bc}$  e  $i_{ml}$ , das fontes  $v_e$  e  $i_j$  e da corrente nos enrolamentos  $i_{mi}$ . Da equação (2.23) pode-se escrever:

$$\mathbf{v}_{mi} = -\mathbf{S}_{16} \mathbf{v}_e - \mathbf{S}_{17} \mathbf{v}_{bc} - \mathbf{S}_{18} \mathbf{v}_{br} - \mathbf{S}_{20} \mathbf{v}_{bi} \quad (2.46)$$

A tensão nos enrolamentos da estrutura eletromagnética é a soma das tensões de ramo e de elo nestes enrolamentos, assim, de (2.46), obtém-se:

$$\mathbf{U} = \mathbf{v}_{mi} - \mathbf{S}_{20} \mathbf{v}_{bi} = -\mathbf{S}_{16} \mathbf{v}_e - \mathbf{S}_{17} \mathbf{v}_{bc} - \mathbf{S}_{18} \mathbf{v}_{br} \quad (2.47)$$

Substituindo a equação (2.39) em (2.47), obtém-se a tensão nos enrolamentos da estrutura eletromagnética:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} = & \left( -\mathbf{S}_{17} + \mathbf{S}_{18} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 \right) \mathbf{v}_{bc} - \mathbf{S}_{18} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T \mathbf{i}_{mi} \\
& \left( -\mathbf{S}_{16} + \mathbf{S}_{18} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 \right) \mathbf{v}_e - \mathbf{S}_{18} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T \mathbf{i}_j \\
& - \mathbf{S}_{18} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T \mathbf{i}_{mi}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

que expressada na forma matricial pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{U}] = & \left[ \left( -\mathbf{S}_{17} + \mathbf{S}_{18} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 \right) \quad -\mathbf{S}_{18} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T \right] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{bc} \\ \mathbf{i}_{mi} \end{bmatrix} \\
& + \left[ \left( -\mathbf{S}_{16} + \mathbf{S}_{18} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 \right) \quad -\mathbf{S}_{18} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T \right] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{i}_j \end{bmatrix} \\
& + \left[ \mathbf{S}_{18} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T \right] \left[ \mathbf{i}_{mi} \right]
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Finalmente, as matrizes  $\mathbf{G}_4$  a  $\mathbf{G}_6$  são obtidas de (2.49) segundo a forma dada pela equação (2.20), resultando em:

$$\mathbf{G}_4 = \left[ \left( -\mathbf{S}_{17} + \mathbf{S}_{18} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 \right) \quad -\mathbf{S}_{18} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T \right] \tag{2.50}$$

$$\mathbf{G}_5 = \left[ \left( -\mathbf{S}_{16} + \mathbf{S}_{18} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 \right) \quad -\mathbf{S}_{18} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T \right] \tag{2.51}$$

$$\mathbf{G}_6 = \left[ \mathbf{S}_{18} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T \right] \tag{2.52}$$

### 2.4.1.3 Os interruptores no circuito de alimentação

Cada interruptor é modelado como sendo um resistor binário. Será uma resistência de valor elevado quando o interruptor se encontrar bloqueado e de valor baixo quando o interruptor se encontrar em condução. Sob este modelo, os interruptores são considerados como resistores na topologia do circuito de alimentação, o valor do resistor depende do estado do interruptor. Assim, as matrizes  $\mathbf{G}_1$  a  $\mathbf{G}_6$  dependem do estado dos interruptores e devem ser calculadas cada vez que os interruptores mudarem de estado.

A mudança de estado dos interruptores é função das ordens de comando e das grandezas elétricas (tensão e corrente próprias ao interruptor considerado). As ordens de

comando podem ser geradas de modo independente, sem ser preciso modelar o circuito que gera estes comandos.

Para representar o funcionamento do interruptor é utilizada a Rede de Pétri que basicamente é formada por um grafo contendo lugares (estados) e transições (condições de chaveamento) [17]. A Rede de Pétri utilizada é livre e pura, isto é, uma rede na qual cada lugar caracteriza no máximo um estado e não pode ser entrada e saída de uma transição ao mesmo tempo [3][7][23].

Na figura 2.9 são apresentadas as Rede de Pétri para quatro semicondutores (diodo, tiristor, transistor e tiristor dual), na sua forma mais simples,

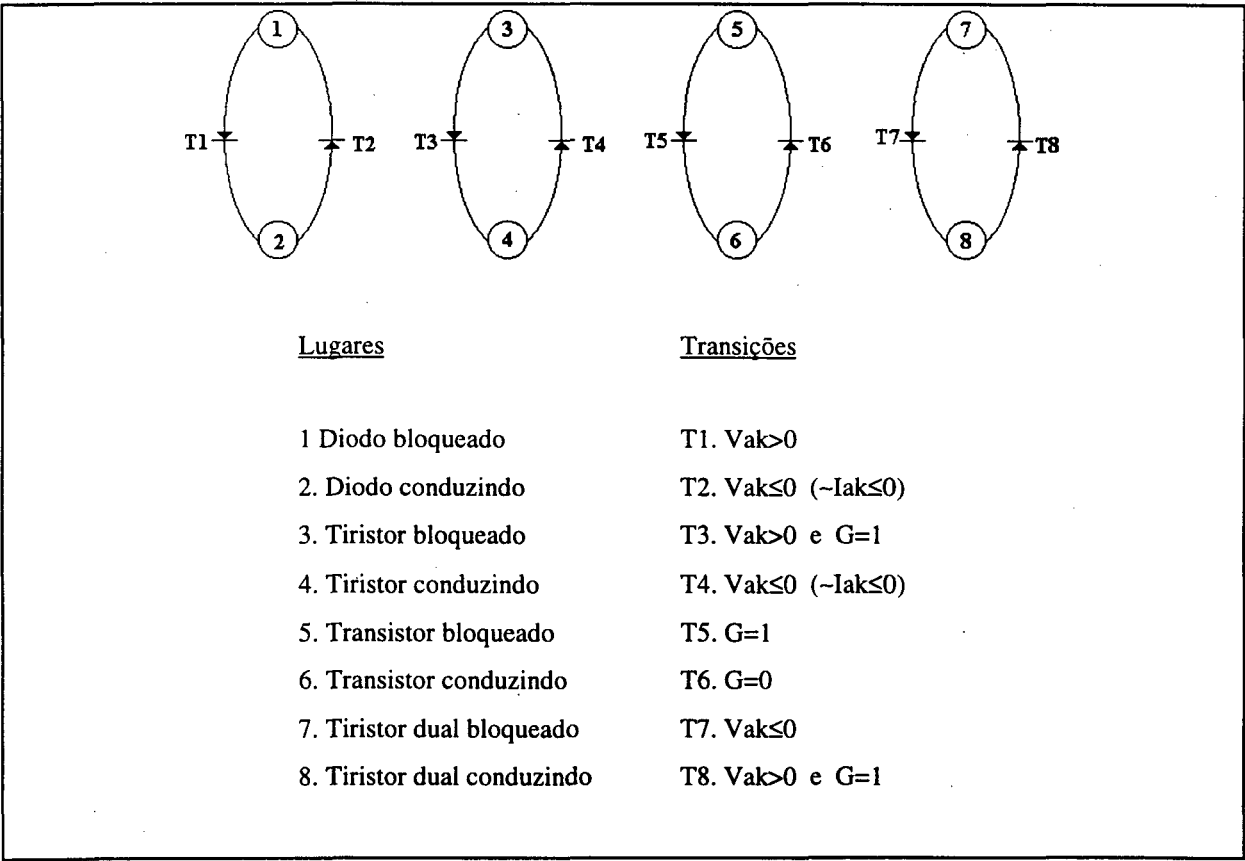


Figura 2.9 Representação por Rede de Pétri

Segundo a figura 2.9 o diodo conduz quando a tensão nos seus terminais torna-se positiva e bloqueia quando a sua corrente se anula. O tiristor vai conduzir quando recebe um pulso de gatilho e a tensão nos seus terminais é positiva. Ele Bloqueia quando sua corrente se



anula. Já o transistor pode ser comandado tanto para bloqueio como para condução. O tiristor dual conduz na passagem por zero da tensão nos seus terminais. Bloqueia quando sua corrente é positiva e recebe um pulso.

As comutações dos interruptores podem ser de dois tipos: comutação comandada e comutação natural. Na comutação comandada, as ordens de comando são definidas pelo usuário ou como o resultado da aplicação de algum tipo de controlador [23]. Neste caso os interruptores têm um eletrodo de comando sobre o qual é possível agir a fim de provocar uma mudança no seu estado de maneira quase instantânea. Na comutação natural ou espontânea, as ordens de comando aparecem quando a tensão ou corrente nos terminais do interruptor muda de sinal [11]. O conhecimento exato dos instantes onde ocorrem as comutações naturais, conduz à procura da ultrapassagem por zero da tensão nos interruptores com comutação natural [22].

## 2.5 Conclusões

Foi apresentada neste capítulo a construção das equações de estado numa associação da estrutura eletromagnética e seu circuito de alimentação. As equações de estado são determinadas diretamente da descrição topológica do conversor conectado à estrutura eletromagnética.

As matrizes  $G_1$  a  $G_6$  dependem somente da topologia do circuito e devem ser recalculadas cada vez que um interruptor muda seu estado. As equações de estado achadas podem ser aplicadas a qualquer conversor conectado a uma estrutura eletromagnética, sem precisar um conhecimento “a priori” do seu funcionamento.

No capítulo seguinte é abordada a importância do conhecimento exato dos instantes onde ocorrem as comutações naturais, assim como as comutações comandadas, produto da pré-definição das ordens de comando dos interruptores. Será mostrado como esta pré-definição das ordens de comando torna impossível definir laços de controle em malha fechada.

## **Capítulo 3**

# **Malha de Realimentação na Simulação do Conjunto Conversor/Estrutura Eletromagnética**

### **3.1 Introdução**

A simulação do conjunto conversor e estrutura eletromagnética, segundo o estado atual do programa EFCIR (programa de simulação numérica de conversores estáticos associados a estruturas eletromagnéticas), necessita que as ordens de comando dos interruptores de potência (diodos, transistores, tiristores e tiristores duais) do circuito externo de alimentação, sejam pré-definidas. A estrutura eletromagnética é modelada utilizando o método dos elementos finitos em 2D, e o conjunto conversor/estrutura eletromagnética é modelado associando as equações elétricas do conversor e as equações do campo da estrutura eletromagnética.

A pré-definição das ordens de comando dos interruptores torna impossível a definição de laços de controle em malha fechada. As ordens de comando dos interruptores devem ser definidas de acordo com a grandeza elétrica de saída a ser controlada e com a lei de controle que se deseja aplicar.

Num sistema com laço de controle em malha aberta, a referência é imposta pelo usuário e a variável de saída não tem influência sobre a variável de entrada e pode divergir consideravelmente do valor de saída desejado. É mais conveniente intervir diretamente sobre os comandos dos interruptores, conseguindo desta forma que a variável de saída fique o mais

próximo possível de um valor pré-determinado. Isto é possível utilizando um laço de controle com malha fechada onde o disparo e bloqueio dos interruptores não são pré-definidos.

Resistores de medida são colocados no circuito para obter as grandezas elétricas de interesse. A tensão nos resistores é calculada, e a partir desta é calculada a tensão nos interruptores, necessária para gerar as mudanças de estado (condução ou bloqueio).

### **3.2 Posição do problema**

Foi visto no capítulo anterior que a mudança de estado dos interruptores pode ocorrer de maneira espontânea, quando ocorre em instantes que não podem ser conhecidos antecipadamente (função das grandezas elétricas), ou de maneira comandada, onde é relativamente fácil de controlar se os comandos de controle são pré-definidos (ordens de comando). A comutação espontânea ocorre quando, por exemplo, muda-se o sinal da tensão num diodo. A comutação comandada é resultado da aparição de uma ordem de comando sobre o eletrodo de comando do interruptor. Na figura 3.1 apresenta-se o fluxograma das comutações espontâneas.

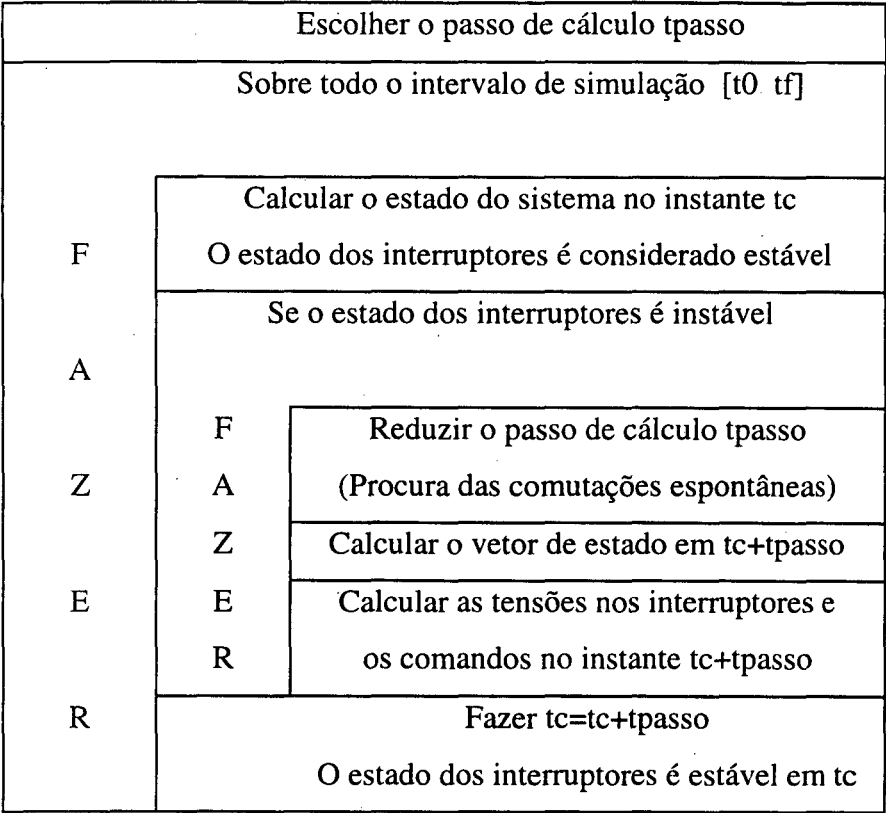


Figura 3.1 Procura das comutações espontâneas

As comutações comandadas são funções das ordens de comando. Na estrutura atual do programa EFCIR, as ordens de comando são pré-definidas no início da simulação, para cada interruptor , sobre um período. Os instantes de disparo e de bloqueio dos interruptores são definidos pelo usuário, e se repetem durante todo o intervalo de simulação. A cada passo de tempo tpasso deve-se verificar o estado dos interruptores. Sobre estas condições a variável de saída não tem influência sobre a variável de entrada. O tipo de controle é de malha aberta, e a saída depende, exclusivamente, das ordens de comando impostas pelo usuário.

Num sistema com laço de controle em malha aberta (figura 3.2), as seqüências temporais, pré-definidas, de disparo e bloqueio dos interruptores, fazem com que a variável de saída adote um valor desejado. A variável de saída não tem influência sobre a variável de entrada, podendo portanto pode divergir consideravelmente do valor desejado, enquanto os comandos dos interruptores permanecem constantes no tempo.

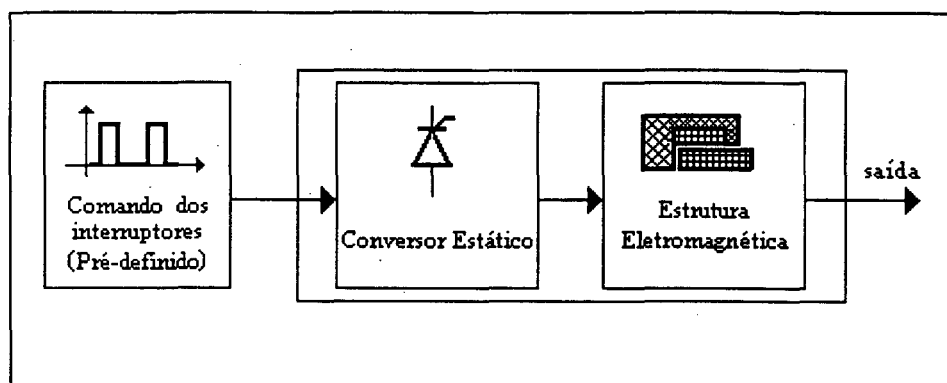


Figura 3.2 Laço de controle em malha aberta

Sendo assim, é mais conveniente medir a saída e intervir diretamente sobre os comandos dos interruptores, no caso de que a saída divirja do valor desejado, conseguindo desta forma que a variável de saída fique o mais próximo possível deste valor. A figura 3.3 mostra este sistema, chamado de laço de controle em malha fechada. Pode-se observar que a sequência temporal de disparo e bloqueio não é mais pré-definida, mas é produto da comparação da saída com uma referência e uma lei de controle conveniente.

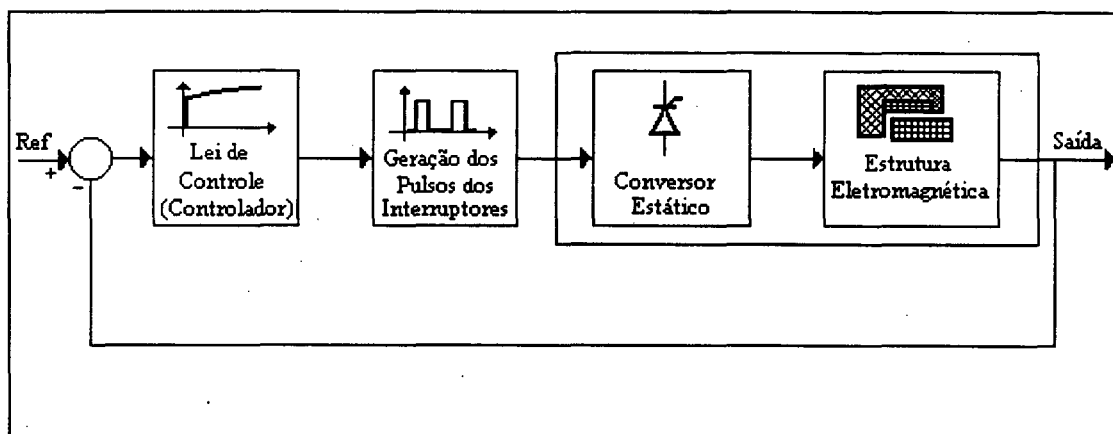


Figura 3.3 Laço de controle em malha fechada

Portanto, para a utilização de laços de controle em malha fechada, as ordens de comando não podem ser mais pré-definidas, mas resultado da variação da saída com respeito a uma referência dada.

3.3 Laço de controle em malha fechada no conjunto conversor/estrutura eletromagnética

Um primeiro método desenvolvido, para levar em conta o laço de controle em malha fechada, é apresentado na figura 3.4. A cada passo de cálculo deve-se verificar a existência das comutações espontâneas e comandadas. As comutações espontâneas são tratadas de acordo ao fluxograma da figura 3.1. Para verificar a existência de comutações comandadas são calculados os comandos dos interruptores em função das grandezas elétricas e a lei de controle implementada. As grandezas elétricas precisam ser calculadas a cada passo de cálculo.

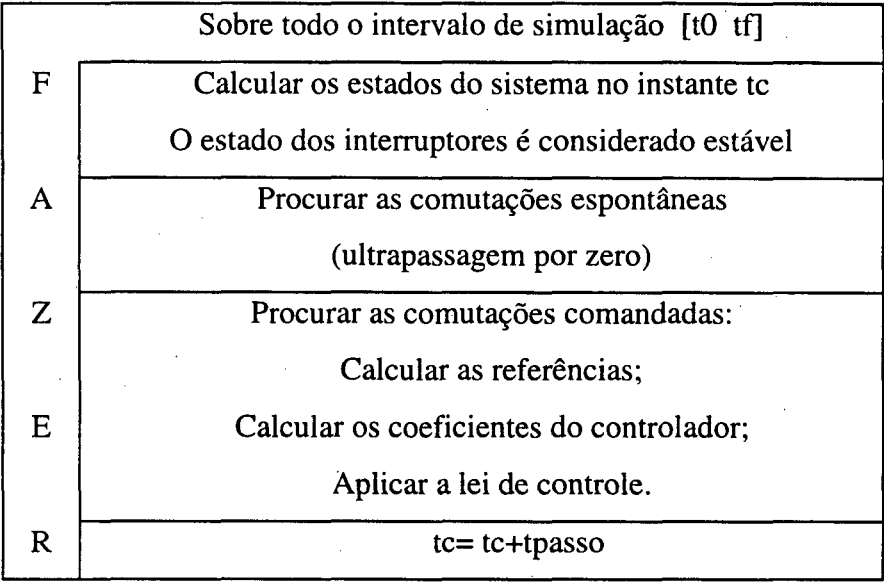


Figura 3.4 Fluxograma dos comandos em cada passo de cálculo

As ordens de comando não aparecem a cada passo de cálculo e nos instantes de observação. Este é o maior inconveniente do método. A precisão sobre os instantes de aparição das ordens de comando não é mais assegurada. Isto acontece porque o passo de cálculo é escolhido em função da frequência das fontes (método a passo fixo). A dinâmica do comando é completamente ignorada.

### 3.3.1 Laços de realimentação amostrados

Com o objetivo de conhecer de modo preciso os instantes em que aparecem as ordens de comando nos interruptores, adota-se um método que leva em conta laços de controle em malha fechada no modo amostrado [23].

Um amostrador é um dispositivo que transforma um sinal contínuo num sinal discreto, (figura 3.5) [5].

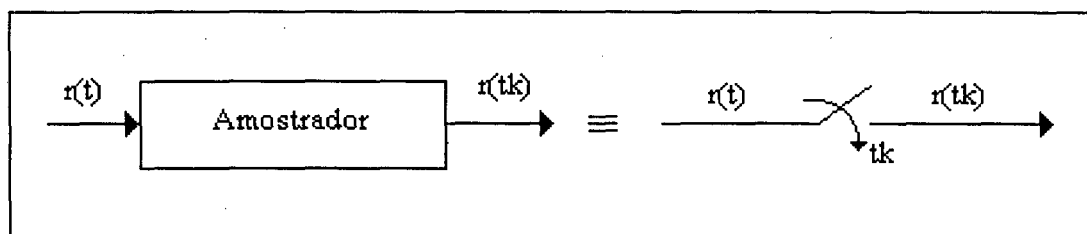


Figura 3.5 Diagrama do amostrador

A entrada do amostrador é um sinal contínuo no tempo  $r(t)$ , sendo a sua saída o valor de  $r(t)$  no instante de amostragem  $t_k$ ,  $r(t_k)$ . Os instantes de amostragem são espaçados no tempo de forma que:  $t_k = nT$ ; sendo  $T$  um período de amostragem fixo e  $n$  um inteiro.

Para o estudo dos laços de controle no modo amostrado, utiliza-se a estrutura da figura 3.6.

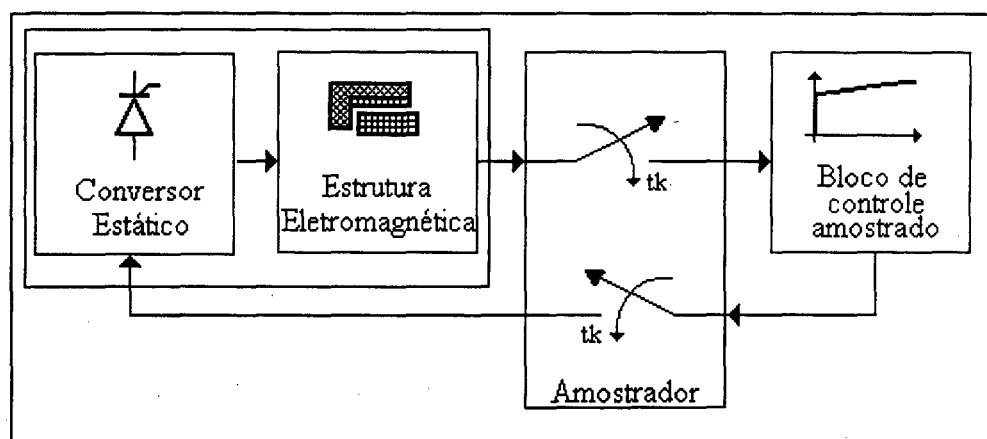


Figura 3.6 Laços de controle no modo amostrado

O modelo adotado (figura 3.6) consta de quatro blocos principais: (i) o conversor estático, que alimenta a estrutura eletromagnética, e que recebe as ordens de comando do bloco de controle amostrado; (ii) a estrutura eletromagnética, alimentada pelo conversor, (iii) o bloco de controle, que recebe, do conjunto conversor/estrutura eletromagnética, as grandezas elétricas necessárias e que gera, via uma lei de controle adequada, as ordens de comando que devem ser aplicadas aos interruptores do conversor a fim de mudar ou não seus estados; (iv) o amostrador, que administra o fornecimento, das grandezas elétricas da estrutura eletromagnética para o controlador, e das ordens de comando geradas pelo controlador para o conversor.

O conjunto conversor/estrutura eletromagnética fornece ao controlador, somente nos instantes de amostragem, as grandezas elétricas necessárias para o cálculo dos coeficientes do regulador. As ordens de comando dos interruptores, geradas pelo controlador, são também determinadas nestes instantes. Para fornecer ao controlador as grandezas elétricas que este precisa, são colocados no circuito, a partir da descrição topológica, resistores chamados de Resistores de Medida. Estes resistores devem ser colocados em paralelo e ter um valor alto quando a tensão num elemento é escolhida como variável. Quando a corrente é a variável selecionada os resistores devem ser postos em série e o valor deles deve ser pequeno. O cálculo, a cada instante de amostragem, da tensão nestes resistores fornece as grandezas elétricas que servem de entrada ao bloco de controle amostrado.

O bloco de controle amostrado recebe a tensão dos resistores de medida, e compara esta tensão com uma referência, calculada pelo controlador, formando assim um sinal de erro. O controlador calcula os seus coeficientes, de acordo com a resposta que se espera conseguir. Esta operação é realizada a cada instante de amostragem. As ordens de comando dos interruptores será o resultado da aplicação da lei de controle implementada.

Na figura 3.7 é apresentado o fluxograma do processo de simulação do laço de realimentação amostrado. Os instantes de amostragem acontecem a intervalos fixos de tempo.



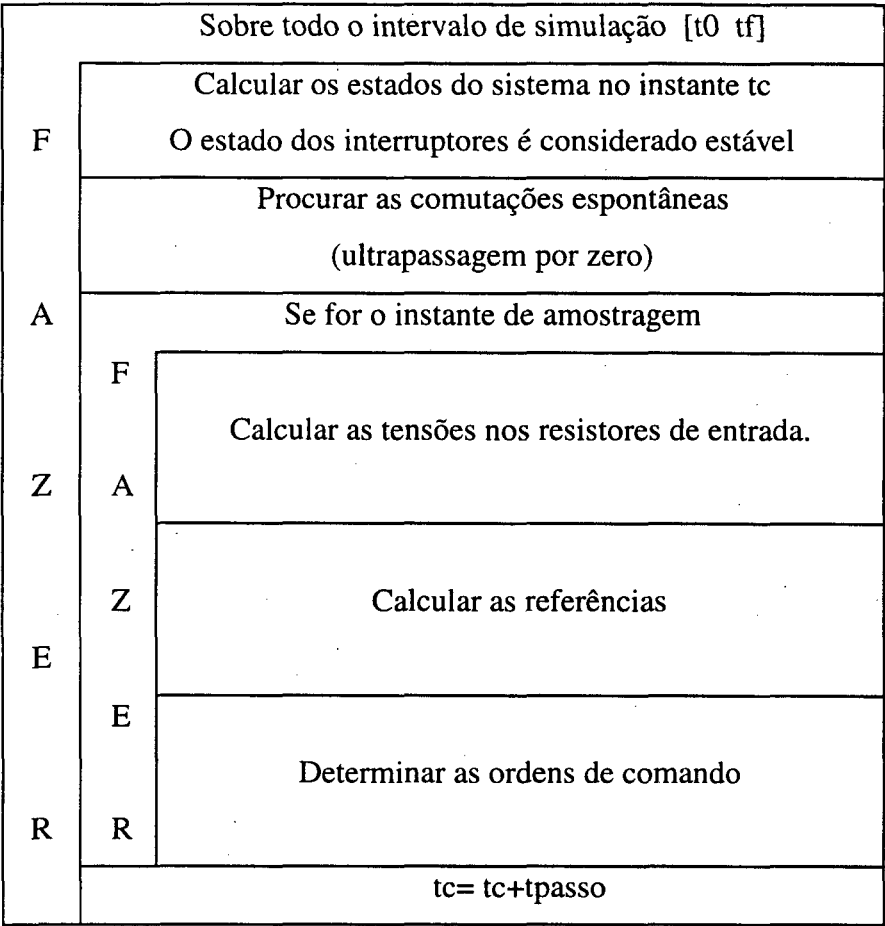


Figura 3.7 Fluxograma da simulação do laço de realimentação amostrado

A determinação das comutações espontâneas é realizada de acordo com o fluxograma da figura 3.1 e a cada passo de cálculo. A tensão nos resistores de medida, as referências no controlador, e as ordens de comando dos interruptores do conversor são determinadas unicamente em cada instante de amostragem. Se acontecer alguma mudança no estado dos interruptores, as matrizes dependentes da topologia do circuito precisam ser recalculadas.

3.3.2 Escolha do passo de cálculo

O método utilizado para o passo de cálculo é de passo fixo, onde o passo é mantido constante no decorrer da simulação, variando só quando é produzida uma comutação, onde é preciso conhecer com precisão o instante na qual se produz. A escolha deste método deve-se

ao fato de que a dinâmica dos comando não é conhecida e também pela sua simplicidade na implementação.

### **3.3.3 Escolha do período de amostragem**

Manter um período fixo de ativação do laço de controle permite o cálculo preciso, pelos métodos clássicos, dos coeficientes do bloco de controle. Com este tipo de amostragem é fácil encontrar relações lineares no tratamento de sistemas dinâmicos lineares e pode-se aplicar o princípio de superposição [10]. O período de amostragem pode ser escolhido segundo dois critérios: se o controle a simular é discreto, ele será utilizado em uma montagem real; se pelo contrário deseja-se simular um controle contínuo do tipo analógico, a precisão desejada sobre os instantes de aparição das ordens de comando permite fazer a escolha [23]. Um método para encontrar os instantes em que as ordens de comando aparecem foi desenvolvido, e será explicado ainda neste capítulo.

## **3.4 Cálculo da tensão nos interruptores e resistores**

As grandezas elétricas que o bloco de controle precisa são as tensões nos resistores. Vale lembrar que os interruptores são modelados como resistores binários, resistência de valor pequeno quando se encontra em condução e de valor alto quando está bloqueado. Estes interruptores formam parte da topologia do circuito, junto com os resistores do circuito, que conformam a configuração da rede, e os resistores de medida, utilizados para obter as grandezas elétricas de interesse.

A tensão nos resistores de medida fornece ao bloco de controle as grandezas elétricas que este precisa para o cálculo das ordens de comando do conversor. A tensão nos interruptores é necessária para gerar as mudanças de estado (condução ou bloqueio) destes interruptores. O cálculo da tensão nos interruptores é feito a partir da tensão dos resistores [11]. A expressão desta tensão é dada por:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} v_{br} \\ v_{mr} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_7 \begin{bmatrix} v_{bc} \\ i_{ml} \end{bmatrix} + \mathbf{G}_8 \begin{bmatrix} v_e \\ i_j \end{bmatrix} + \mathbf{G}_9 [i_{mi}] \quad (3.1)$$

onde:

$\mathbf{Y}$  : Variável de saída (tensões nos resistores);

$v_{br}$  : Tensão nos resistores de ramo;

$v_{mr}$  : Tensão nos resistores de elo;

$v_{bc}$  : Tensão nos capacitores de ramo;

$i_{ml}$  : Corrente nos indutores de elo;

$v_e$  : Fontes de tensão;

$i_j$  : Fontes de corrente;

$i_{mi}$  : Corrente nos enrolamentos;

$\mathbf{G}_7, \mathbf{G}_8, \mathbf{G}_9$  : Matrizes que dependem da topologia do circuito.

A tensão nos resistores de ramo é dada pela equação (2.39) do capítulo 2, e é expressa por:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{br} = & -\mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 \mathbf{v}_{bc} + \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T \mathbf{i}_{ml} \\ & - \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 \mathbf{v}_e + \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T \mathbf{i}_j \\ & + \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T \mathbf{i}_{mi} \end{aligned} \quad (3.2)$$

A tensão nos resistores de elo é determinada a partir de (2.25), tomando a seguinte forma:

$$\mathbf{v}_{mr} = \mathbf{R}_2 \mathbf{i}_{mr} \quad (3.3)$$

A corrente nos resistores de elo,  $\mathbf{i}_{mr}$ , é dada pela equação (2.32), que é escrita a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{mr} = & -\mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 \mathbf{v}_{bc} - \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T \mathbf{i}_{ml} - \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 \mathbf{v}_e \\ & - \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T \mathbf{i}_{mi} - \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T \mathbf{i}_j \end{aligned} \quad (3.4)$$

Substituindo a equação (3.4) em (3.3), obtemos a expressão para a tensão nos resistores de elo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{mr} = & -\mathbf{R}_2 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 \mathbf{v}_{bc} - \mathbf{R}_2 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T \mathbf{i}_{ml} - \mathbf{R}_2 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 \mathbf{v}_e \\ & - \mathbf{R}_2 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T \mathbf{i}_{mi} - \mathbf{R}_2 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T \mathbf{i}_j \end{aligned} \quad (3.5)$$

Escrevendo as equações (3.5) e (3.2) na forma matricial, segundo a forma de (3.1), a tensão nos resistores resulta em:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{br} \\ \mathbf{v}_{mr} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 & \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T \\ -\mathbf{R}_2 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 & -\mathbf{R}_2 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{bc} \\ \mathbf{i}_{ml} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 & \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T \\ -\mathbf{R}_2 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 & -\mathbf{R}_2 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{i}_j \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T \\ -\mathbf{R}_2 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T \end{bmatrix} [\mathbf{i}_{mi}] \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde:

$$\mathbf{G}_7 = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 & \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T \\ -\mathbf{R}_2 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_7 & -\mathbf{R}_2 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{13}^T \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{G}_8 = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_8^T \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 & \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T \\ -\mathbf{R}_2 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_6 & -\mathbf{R}_2 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{23}^T \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{G}_9 = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T \\ -\mathbf{R}_2 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{S}_8 \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_{18}^T \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

### 3.5 Gestão das comutações dos interruptores no modo de controle amostrado

Com a utilização dos laços de controle em malha fechada, operando a uma frequência de amostragem fixa, as ordens de comando forçam ao interruptor a mudar seu estado: de condução a bloqueio ou de bloqueio a condução. Por exemplo, para bloquear um tiristor, precisa-se que a tensão anodo-catodo seja negativa, mas esta tensão inversa é aplicada por um circuito externo ao conversor, projetado para realizar esta operação.

A gestão das mudanças de estado dos interruptores e as modificações nos seus resistores binários é efetuada em função das grandezas de dois tipo: binárias pelas ordens de comando (bloqueio-condução), e contínuas pelas grandezas elétricas (tensão e corrente próprias ao interruptor considerado). As ordens de comando podem ser geradas de modo independente, isto é, os circuitos que geram estas ordens de comando não precisam ser modelados.

Para levar em conta os laços de controle em malha fechada, foi modificada a definição das transições das Rede de Pétri, cujo formalismo foi apresentado no capítulo 2. Foram adicionadas condições de transição. Estas condições adicionais descrevem o resultado da aplicação de uma lei de controle qualquer, independente do circuito em estudo. A figura 3.8 mostra as Rede de Pétri para quatro semicondutores (diodo, tiristor, transistor e tiristor dual).

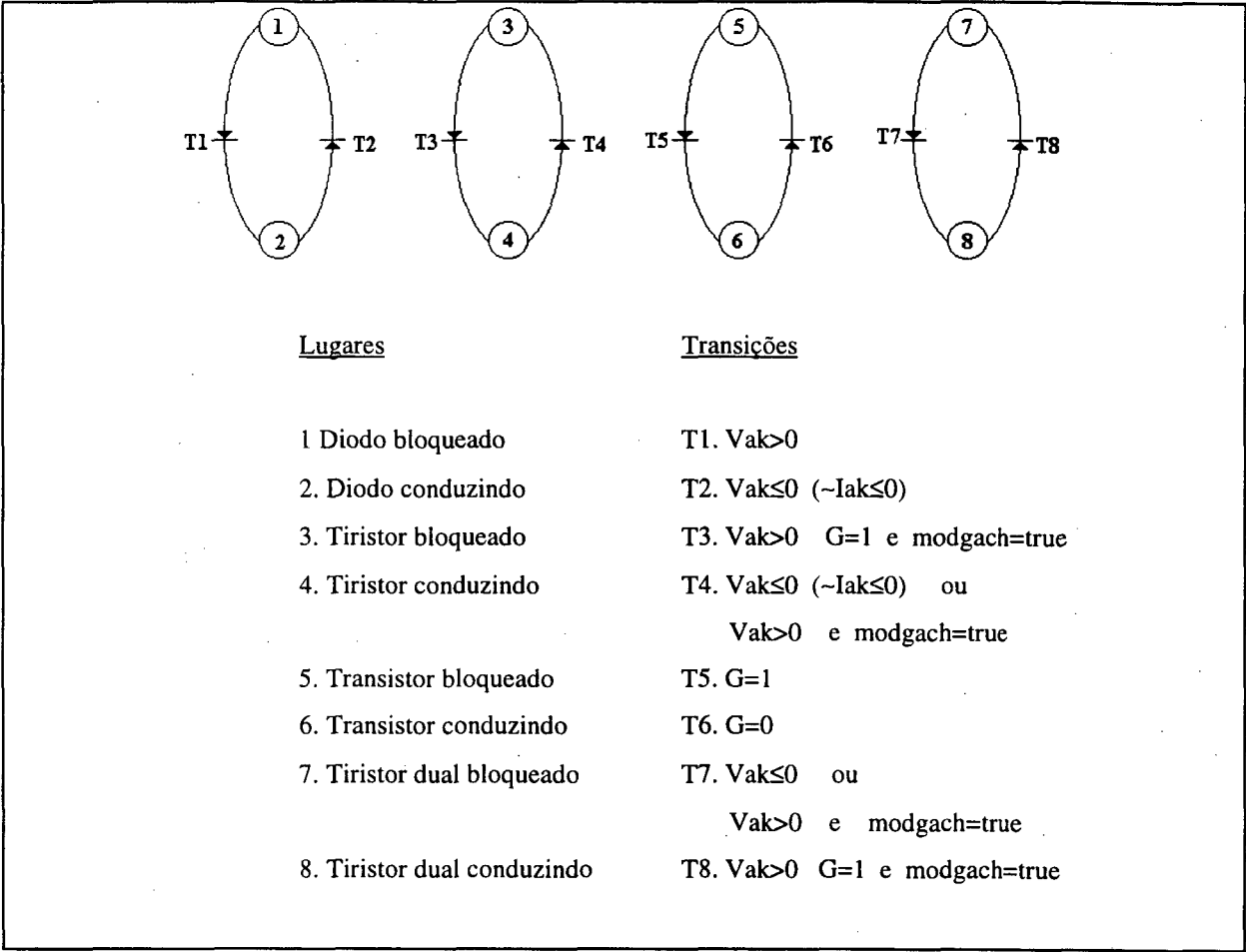


Figura 3.8 Representação por Rede de Pétri

Da figura 3.8, pode-se observar que o diodo e o transistor mantêm as suas condições de transição de estado. Isto acontece porque o diodo comuta naturalmente, e o transistor só precisa de um pulso de disparo para entrar em condução, e deixa de conduzir quando este pulso desaparece. O tiristor e o tiristor dual somam condições de transição para a mudança de estado, que será dada como resultado da aplicação da lei de controle. Para o caso do tiristor, por exemplo, ele é bloqueado quando a tensão anodo-catodo é negativa, mas se for preciso forçá-lo ao bloqueio, ainda que a tensão anodo-catodo seja positiva, é preciso um circuito de comutação adicional para realizar esta tarefa. A ação deste circuito de comutação adicional, que não precisa ser modelado, é substituído pela variável lógica MODGACH. Esta aparece quando as grandezas elétricas fornecidas ao controlador saem fora dos limites estabelecidos pela lei de controle, mudando o estado dos interruptores, tentando manter as grandezas elétricas dentro dos limites estabelecidos.

### 3.6 Procura dos instante exatos das comutações comandadas

É preciso, para a gestão das mudanças de estado nos interruptores, conhecer com precisão os instantes em que elas aparecem, tanto para as comutações espontâneas (fluxograma da figura 3.1), como para as comutações comandadas, produto das ordens de comando geradas pelo controlador.

A procura pelos instante em que acontecem as comutações comandadas só é realizada nos instantes de amostragem. Nestes instantes são calculadas as tensões nos resistores de medida, as referências e coeficientes necessários para o controlador, e dependendo da lei de controle em estudo, as tensões dos resistores de medida são comparadas com as referências. O resultado desta comparação deve indicar se a tensão no resistor de medida ultrapassou os limites estabelecidos. Nesse caso procura-se o instante exato da ultrapassagem, como foi explicado anteriormente. Quando o instante exato é achado, são geradas as ordens de comando dos interruptores.

Para ilustrar o método proposto, um controlador do tipo modulação senoidal com histerese da corrente, que tem uma referência superior e uma referência inferior foi desenvolvido (figura 3.9). Este controlador é considerado pela sua simplicidade. O objetivo do controlador é manter a grandeza elétrica de interesse dentro das referências superior e inferior. Cada vez que os limites são ultrapassados, os estados dos interruptores devem mudar para forçar a grandeza a ficar dentro destes limites.

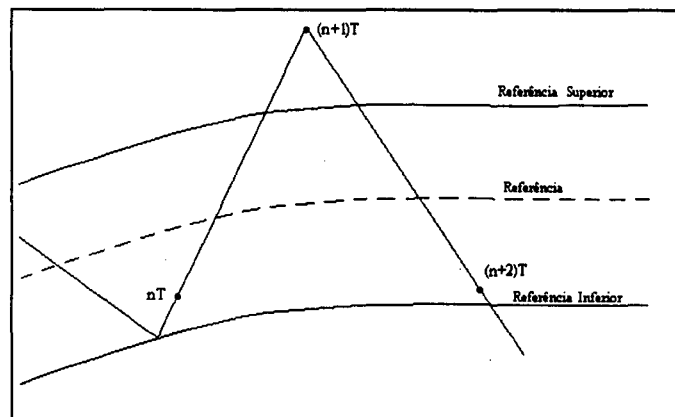


Figura 3.9 Procura das comutações comandadas com período de amostragem  $T$ , num controlador do tipo modulação senoidal com histerese.

Para explicar como o método funciona, é utilizada a figura 3.9, e supõe-se que a grandeza a controlar é a corrente da estrutura eletromagnética, e o passo de cálculo é  $t_{passo}$ . Supõe-se, também, que o período de amostragem é  $T$  com  $T > t_{passo}$ . Três instantes de amostragem são considerados:  $nT$ ,  $(n+1)T$  e  $(n+2)T$ .

Vários casos serão tratados:

#### Caso 1:

A procura dos instantes exatos em que acontecem as comutações comandadas não é levado em conta (figura 3.10). Neste caso a corrente no dispositivo eletromagnético no tempo  $nT$ , se encontra dentro dos limites superior e inferior, portanto nenhuma mudança nos estados dos interruptores acontece. A partir deste instante o cálculo das tensões e correntes nos elementos do circuito, assim como a procura das comutações espontâneas, é feita a cada passo de cálculo  $t_{passo}$  nos instantes  $nT+t_{passo}$ ,  $nT+2*t_{passo}$ , etc. A corrente no dispositivo eletromagnético aumenta até alcançar o instante de amostragem  $(n+1)T$ , o que acontece no instante  $nT+m*t_{passo}$  com  $m$  sendo um inteiro, onde o limite superior é ultrapassado. Os interruptores são forçados a mudarem seus estados, resultando na diminuição da corrente até chegar a  $(n+2)T$ , seguinte instante de amostragem, onde também não acontece mudanças nos estados dos interruptores.

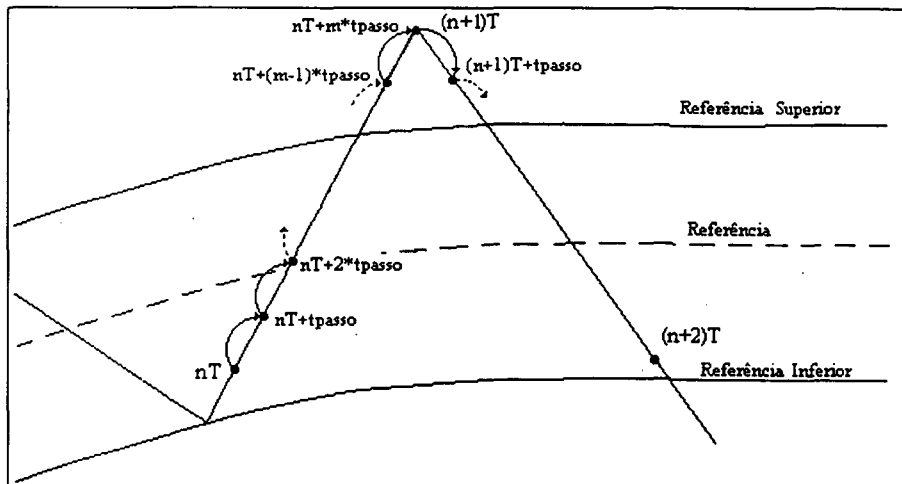


Figura 3.10 Caso onde não é feita a procura dos instantes exatos em que acontecem as comutações comandadas



## Caso 2:

Entre os instantes de amostragem  $nT$  e  $(n+1)T$  acontece uma mudança de estado. (figura 3.11). Já foi visto que no instante  $nT$  não acontecem mudanças nos interruptores. A partir deste instante avança-se no tempo um passo de cálculo,  $nT+tpasso$ , onde são calculadas as tensões e correntes nos elementos do circuito e é feita a procura das comutações espontâneas. A cada um dos passos de cálculo seguintes ( $nT+2*tpasso$ ,  $nT+3*tpasso$ , ...) até alcançar o próximo instante de amostragem (instante  $nT+m*tpasso$ ), é realizada a mesma operação. Quando o instante de amostragem  $(n+1)T$  é atingido, a corrente no dispositivo eletromagnético é comparada com as referências estabelecidas na lei de controle.

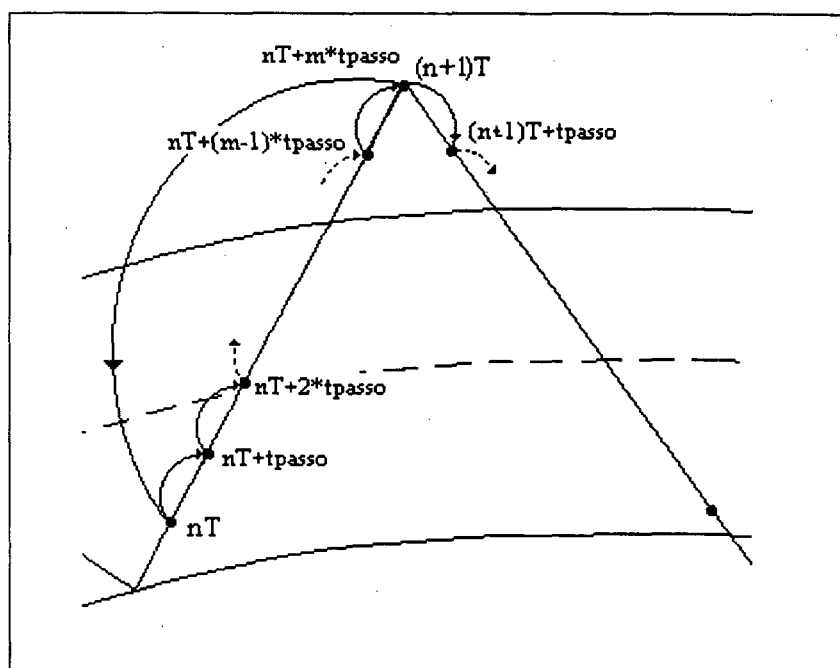


Figura 3.11 Volta ao instante de amostragem anterior a  $(n+1)T$  na procura do momento exato de ultrapassagem da referência

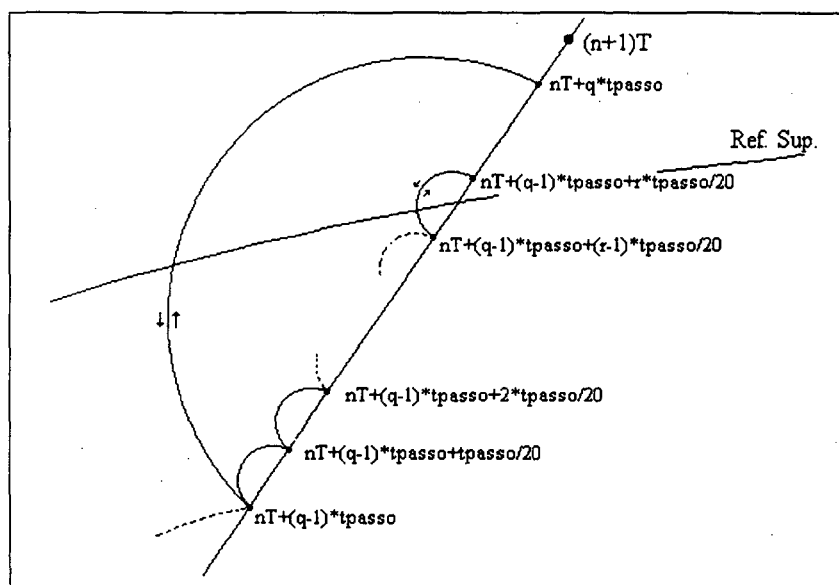


Figura 3.12 Volta ao passo de cálculo anterior na procura do instante exato da ultrapassagem da referência

Como houve ultrapassagem da referência, volta-se no tempo ao instante de amostragem anterior  $nT$ , e a partir deste avança-se tantos passos de cálculos ( $tpasso$ ) foram necessários, (figura 3.12), até que a referência seja ultrapassada. É importante observar que o cálculo das tensões e correntes nos elementos do circuito e a comparação da corrente no dispositivo eletromagnético com as referências, estabelecidas na lei de controle, será feita a cada um destes passos de cálculo. Quando a referência for ultrapassada novamente, volta-se no tempo, mas só ao passo de cálculo anterior à ultrapassagem, i.e. na figura 3.12 volta-se de  $nT+q*tpasso$  para  $nT+(q-1)*tpasso$ . O passo de cálculo  $tpasso$  é reduzido a  $tpasso/20$ , e a partir deste instante os cálculos são feitos a cada passo de cálculo reduzido até que uma nova ultrapassagem acontecer, i.e. na figura 3.12 a ultrapassagem da referência acontece entre os instantes  $nT+(q-1)*tpasso+(r-1)*tpasso/20$  e  $nT+(q-1)*tpasso+r*tpasso$ . Esta operação é repetida até que a corrente no dispositivo eletromagnético se aproxime da referência com um erro de  $\pm 1e-4$  (figura 3.13). Após de alcançar este ponto, os interruptores mudam seus estados de acordo com a definição das ordens de comando da lei de controle. O período de amostragem é atualizado a partir deste instante. A figura 3.14 mostra o fluxograma referido à procura dos instantes em que acontecem as comutações comandadas.

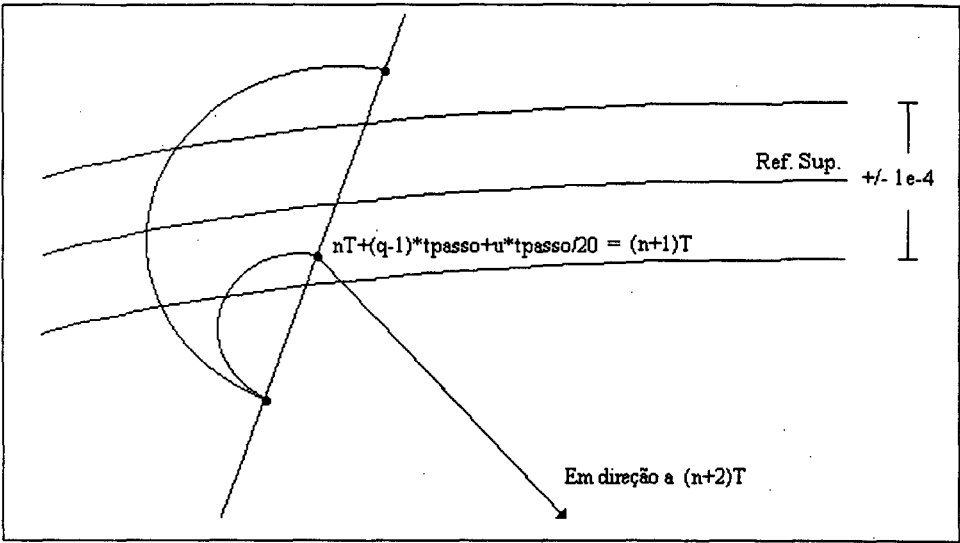


Figura 3.13 O instante mais próximo à referência antes da ultrapassagem (Erro=1e-4)

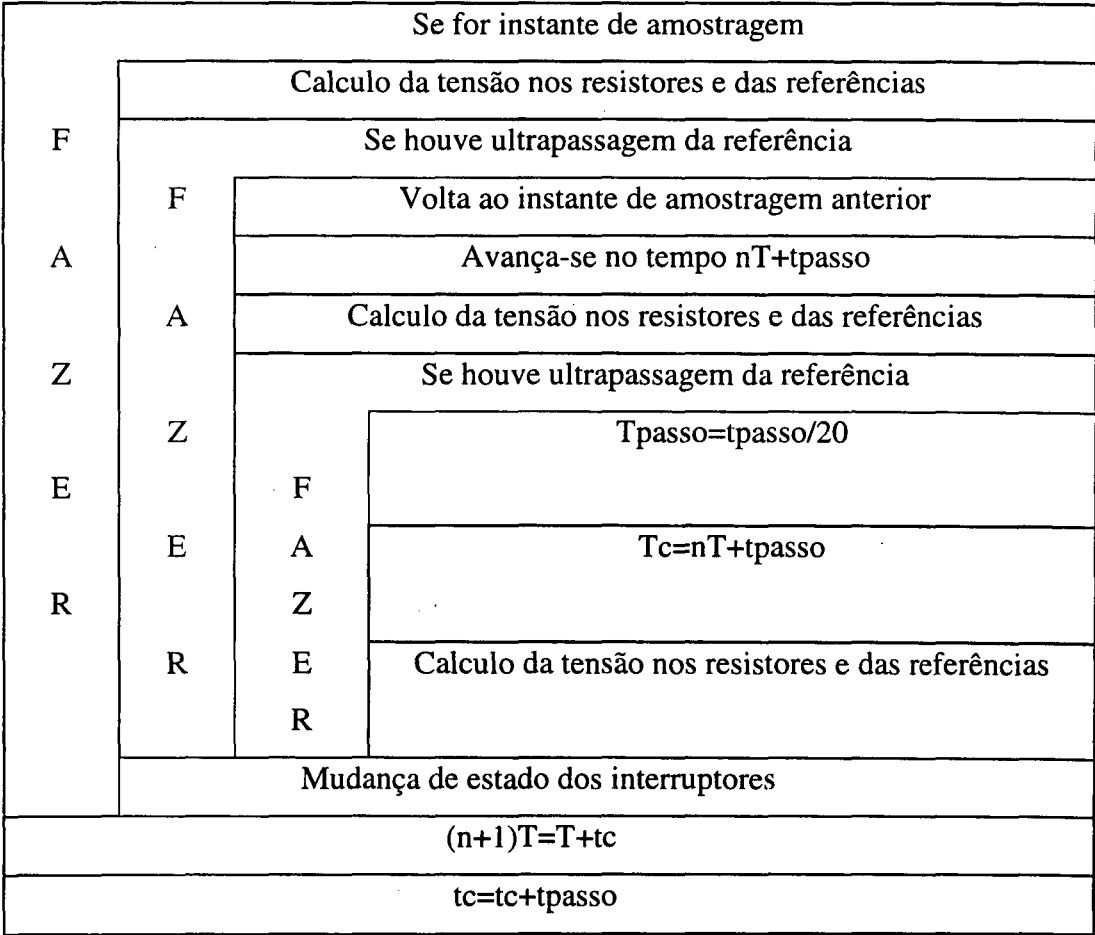


Figura 3.14 Procura das comutações comandadas

A simulação completa de um inversor em ponte completa com controle por modulação senoidal com histerese para os dois casos é apresentada na figura 3.15.

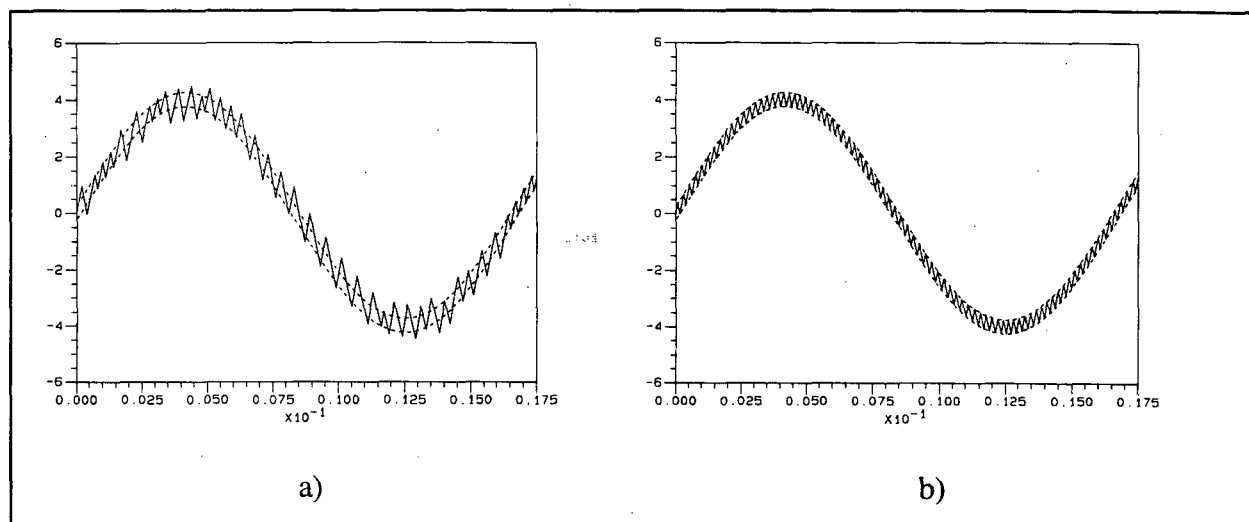


Figura 3.15 Comutações comandadas; a) sem procura dos instantes exatos em que estas aparecem; b) com procura destes instantes.

Quando a procura dos instantes exatos das comutações comandadas não é utilizada, estas aparecem dependendo do período de amostragem escolhido, e nem sempre coincidem com a referência superior ou inferior da histerese. Aplicando o método de procura proposto, pode-se observar que os instantes exatos da ultrapassagem dos limites são encontrados, determinando-se os instantes em que aparecem as comutações comandadas.

### 3.7 Descrição do programa

Com o objetivo de manter a estrutura atual do programa, foram separadas as simulações em malha fechada e malha aberta. Um diagrama da estrutura lógica do programa de controle no modo amostrado é apresentado na figura 3.16.

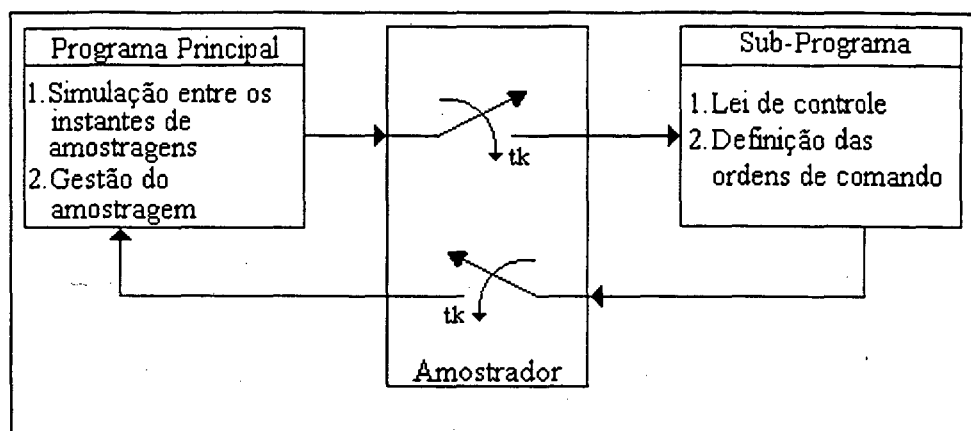


Figura 3.16 Estrutura lógica levando em conta os controladores amostrados

No programa principal é feita a simulação do conjunto conversor/estrutura eletromagnética entre dois instantes de amostragem e o cálculo das variáveis elétricas de entrada ao sub-programa de controle, através dos resistores de medida colocados no circuito. No sub-programa se encontram a descrição da lei de controle, que utiliza as variáveis elétricas fornecidas pelo programa principal para o cálculo do erro, e a definição das ordens de comando, que utiliza este erro calculado, que deverão ser fornecidas ao programa principal.

Esta troca de informação entre o programa principal e o sub-programa de controle é realizado somente nos instantes de amostragem. Nestes instantes o programa principal deve fornecer as variáveis elétricas do circuito ao sub-programa de controle, e este entrega as ordens de comando ao programa principal.

Assim, a simulação de laço de controle em malha fechada, pode ser separado em blocos (figura 3.17), onde cada bloco representa uma ação do programa. Os blocos da lei lógica, conversor e estrutura eletromagnética formam parte do programa principal. O bloco do controlador é parte do sub-programa.

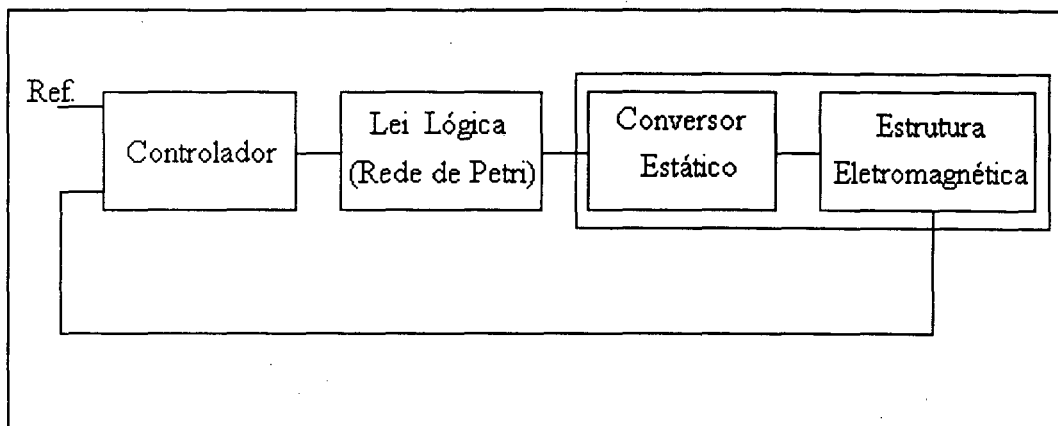


Figura 3.17 Diagrama de blocos do programa de controle

O controlador recebe o valor da referência e, através dos resistores de medida, os valores das grandezas elétricas do circuito, aplica a lei de controle e elabora as ordens de comando que serão fornecidos ao programa principal. No bloco da lei lógica se encontra o formalismo das Rede de Pétri onde são gerados os comandos e distribuídos os impulsos aos interruptores do conversor que alimenta a estrutura eletromagnética. Esta característica modular permite construir sub-programas de novos controladores para tratar diversos problemas.

### 3.7.1 Exemplo de aplicação

Um exemplo de aplicação é apresentado com o propósito de mostrar, de forma simplificada, o aspecto conversacional do programa. O menu da simulação com laço de controle em malha fechada é apresentado na figura 3.18. Ele aparece antes do início da simulação propriamente dita, e permite definir os instantes de amostragem (frequência ou período) e o elemento ou elementos resistivos de medida que serão controlados.

**EFCIR**

Simulação do conjunto conversor/estrutura eletromagnética  
com laço de realimentação amostrado

**MALHA DE REALIMENTAÇÃO**

1. Frequência de amostragem

você vai ingressar com a:

Frequência (Hz)

Período (Seg.)

2. Elemento resistivo a controlar

Resistor 1

Resistor 2

Resistor 3

Quantos você vai controlar?

Qual é o elemento “n” a controlar?

Figura 3.18 Ambiente simplificado definindo o tempo de amostragem e os resistores de medida a controlar

O exemplo considerado é o *chopper* classe A da figura 3.19. Deseja-se que a corrente na estrutura eletromagnética siga uma referência constante, com arranque a partir de condições iniciais nulas, em partida suave, com um erro igual a 12% e com um tempo de subida  $t_m$ . A figura 3.20 apresenta a referência com o erro permitido. Este tipo de controle é de valores extremos de corrente.

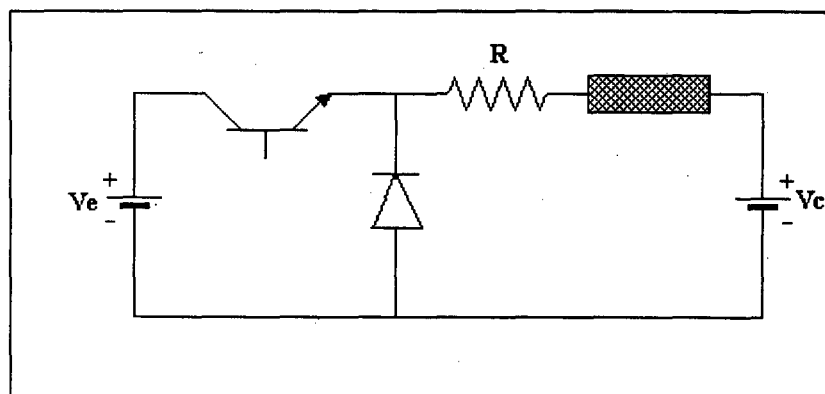


Figura 3.19 *Chopper classe A*

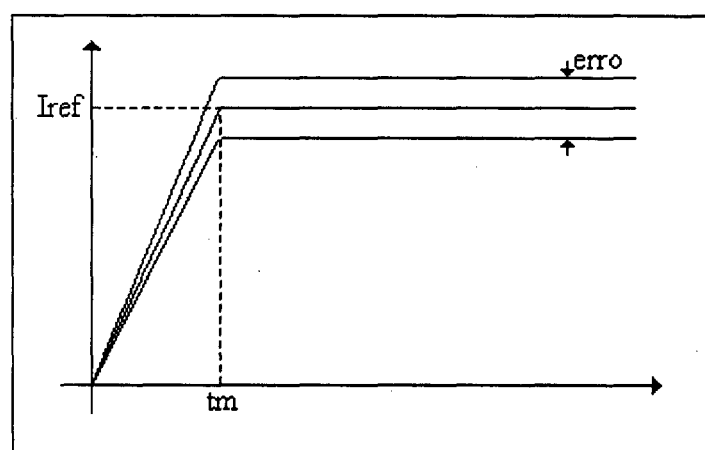


Figura 3.20 Corrente de referência e o erro permissível

O sub-programa de controle, cujo fluxograma é apresentado na figura 3.21, só mostra as instruções necessárias para a elaboração do controle (figura 3.20), sobre o resistor de medida do circuito da figura 3.19.



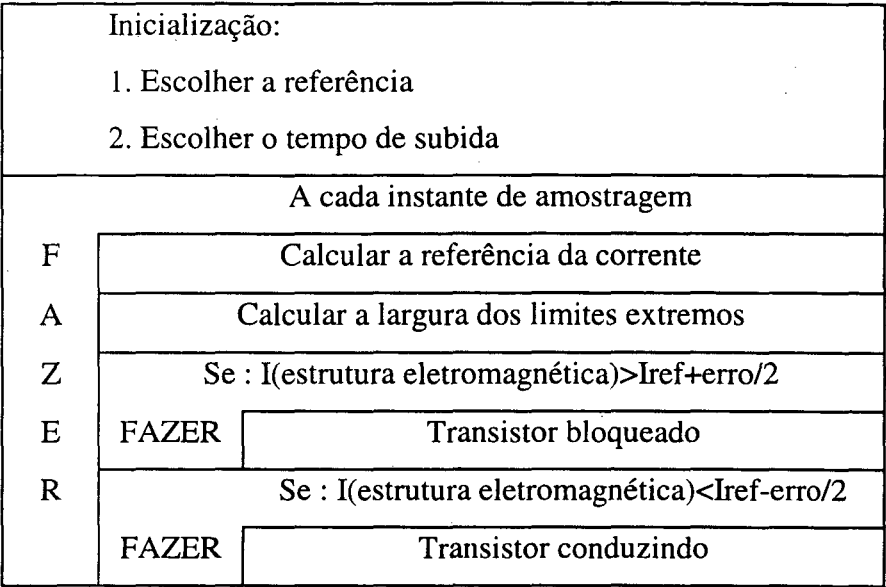


Figura 3.21 Fluxograma do sub-programa de controle por valores extremos de corrente.

Na figura 3.22 é apresentado, de forma parcial, o programa de controle escrito em linguagem FORTRAN, que facilita a compreensão do fluxograma da figura 3.21. Nele é mostrado a parte de inicialização que é executada uma única vez no começo da simulação para definição dos parâmetros do controlador.

Sub-rotina Controle por limites extremos de corrente

c Iee : Corrente na estrutura eletromagnética

c Refsup : Referência superior

c Refinf : Referência inferior

c tm : Tempo de subida

c gach(i) : Variável que descreve as ordens de comando

c Declaração das variáveis

c Inicialização

write(\*,\*)' Valor da referência: '

read(\*,\*)ref

write(\*,\*)' tempo de subida: '

read(\*,\*)tm

write(\*,\*)' erro permissível: '

read(\*,\*)erro

c Cálculo da referência e os limites

$I_{ref} = t_c \cdot ref / t_m$

if( $I_{ref} > ref$ )  $I_{ref} = ref$

$ref_{sup} = I_{ref} + erro / 2$

$ref_{inf} = I_{ref} - erro / 2$

c Elaboração dos comandos

if( $I_{ee} > ref_{sup}$ )  $gach(i) = 0$

if( $I_{ee} < ref_{inf}$ )  $gach(i) = 1$

Figura 3.22 Sub-programa da lei de controle

Pode-se verificar, da figura 3.22, que a cada instante de amostragem são calculadas as referências. Para o caso do exemplo aqui proposto, são calculadas  $I_{ref}$ ,  $ref_{sup}$  e  $ref_{inf}$ . A elaboração das ordens de comando é realizada pela comparação das referências calculadas e as grandezas obtidas dos resistores de medida ( $I_{ee}$ ), resultando no valor da variável  $gach(i)$  ( $gach(i)=0$  transistor bloqueado,  $gach(i)=1$  transistor conduzindo). A variável  $gach(i)$  resultante, é utilizado por outro sub-programa para mudar o estado do transistor.

A corrente no dispositivo eletromagnético do circuito considerado, *chopper* classe A, é mostrado na figura 3.23. O tempo de subida considerado para este exemplo de aplicação é de 0.003 segundos, e os valores máximo e mínimo são 4.125 e 3.857 respectivamente.

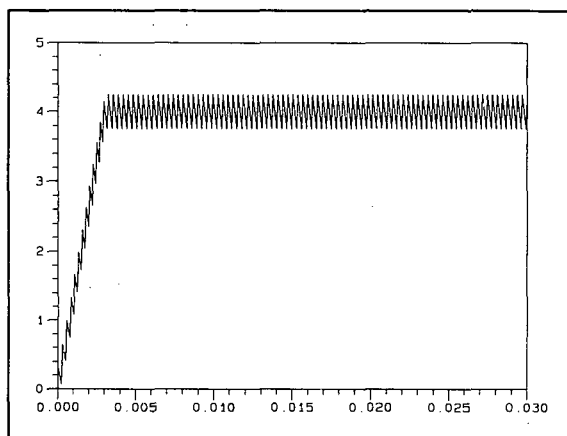


Figura 3.23 Corrente no dispositivo eletromagnético para exemplo de aplicação

### 3.8 Limitações

A principal limitação, quando se trabalha no modo amostrado, é a escolha da frequência de amostragem. Existe uma relação entre qualidade de informação e custo de tempo de cálculo. Quando são utilizadas frequências de amostragem muito altas, a qualidade da informação é muito melhor, mas o custo em volume de informação a ser armazenada e tempo de cálculo será maior. Outra relação importante é a que existe entre a frequência de amostragem e a velocidade de variação das grandezas que se desejam medir. Neste caso, a

escolha da frequência de amostragem dependerá da precisão desejada sobre os instantes de aparição das ordens de comando. Ainda que for utilizada a procura dos instantes exatos das comutações comandadas, explicada na seção 3.5, a frequência de amostragem deve ser escolhido adequadamente.

Outra limitação importante é a escolha do passo de cálculo fixo. O passo de cálculo é dependente do período de amostragem, porque ele não pode ser maior. O passo de cálculo deve ser menor ou igual ao período de amostragem. Se o passo de cálculo fosse maior, então entre dois instantes de amostragem não haveria nenhum cálculo das grandezas elétricas, o que produz um cálculo errado dos coeficientes dos controladores, e uma perda em tempo de cálculo e qualidade de informação.

### 3.9 Conclusões

Para considerar laços de controle em malha fechada no modo amostrado, as ordens de comando dos interruptores não podem mais ser pré-definidas. As ordens de comando serão o resultado das grandezas elétricas da estrutura eletromagnética e a lei de controle implementada.

Para levar em conta os laços de controle em malha fechada, foi modificada a definição das transições das Rede de Pétri, somando condições de transição, em alguns dos interruptores, que descrevem o resultado da aplicação de uma lei de controle qualquer, independente do circuito em estudo.

Foi desenvolvido um método para achar os instantes exatos onde acontecem as ultrapassagens das referências. Este método leva em conta os instantes de amostragem e o passo de cálculo. O objetivo deste método é melhorar a simulação de sistemas contínuos do tipo analógico e a precisão sobre os instantes de aparição das ordens de comando.

## **Capítulo 4**

### **Aplicações e Resultados**

#### **4.1 Introdução**

Neste capítulo são apresentadas duas técnicas de controle implementadas. A modulação senoidal com histerese e a modulação por largura de pulsos (PWM). Estas técnicas de controle, muito utilizadas, foram escolhidas pela sua simplicidade de implementação computacional. Uma breve descrição de cada uma delas é apresentada.

Serão apresentados também, diversos exemplos de aplicação, que servem para testar o programa de simulação levando em conta a malha de realimentação no modo amostrado. Os exemplos implementados não representam uma aplicação específica. Os interruptores considerados na simulação foram o transistor e o tiristor.

O dispositivo eletromagnético, simulado utilizando o programa EFCAD (Electromagnetic Fields Computer Aided Design) desenvolvido pelo GRUCAD (Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos), é um contator, mas para efeito de simulação e teste do programa, ele só interessa pelo seu valor de indutância. Só serão consideradas estruturas eletromagnéticas que sejam lineares e modeladas em duas dimensões.

Para efeito de validar os resultados obtidos, será utilizado o programa PSPICE versão 5.4 para Windows 3.1. Os resultados obtidos, da simulação do programa com malha de realimentação no modo amostrado implementado, são comparados com os resultados obtidos pelo programa PSPICE.

## 4.2 Modulação Senoidal com Histerese

Esta técnica está baseada no controle da corrente. Na figura 4.1 é mostrado o diagrama de blocos do controle por modulação senoidal com histerese.

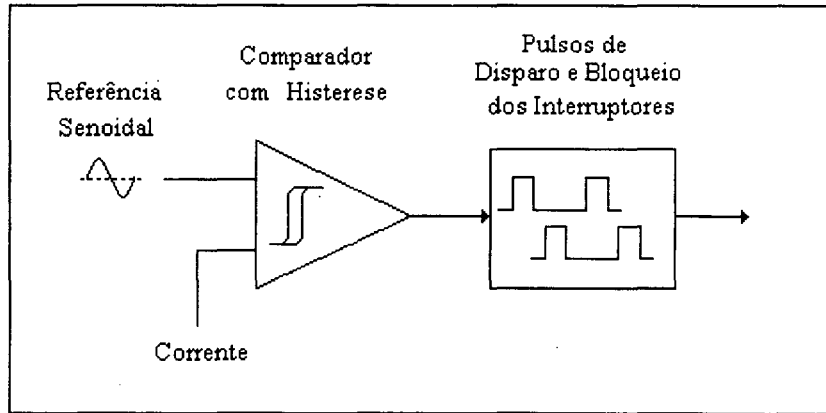


Figura 4.1 Diagrama de blocos do controle por modulação senoidal com histerese

O circuito de controle gera o sinal de referência senoidal com amplitude e frequência desejada. Esta referência é comparada com a variável controlada (corrente) através de um circuito comparador, que tem um limite superior e um limite inferior chamado de histerese. A saída do comparador é utilizada para gerar os pulsos de comando dos interruptores [4].

Os limites superior e inferior, assim como a referência do sinal são calculados de acordo às seguintes relações[12]:

$$\text{ref} = \text{AmpSen}(\omega t + \varphi) \quad (4.1)$$

$$\text{refsup} = \text{ref} + \frac{\Delta I}{2} \quad (4.2)$$

$$\text{refinf} = \text{ref} - \frac{\Delta I}{2} \quad (4.3)$$

onde:

Ref : Sinal de referência;

Refsup : Referência superior;

Refinf : Referência inferior;

Amp : Amplitude;

$\omega$  : Pulsação do sinal de referência;

$\varphi$  : Fase do sinal de referência;

$\Delta I$  : Ondulação máxima permitida na variável de controle

e são ilustrados na figura 4.2:

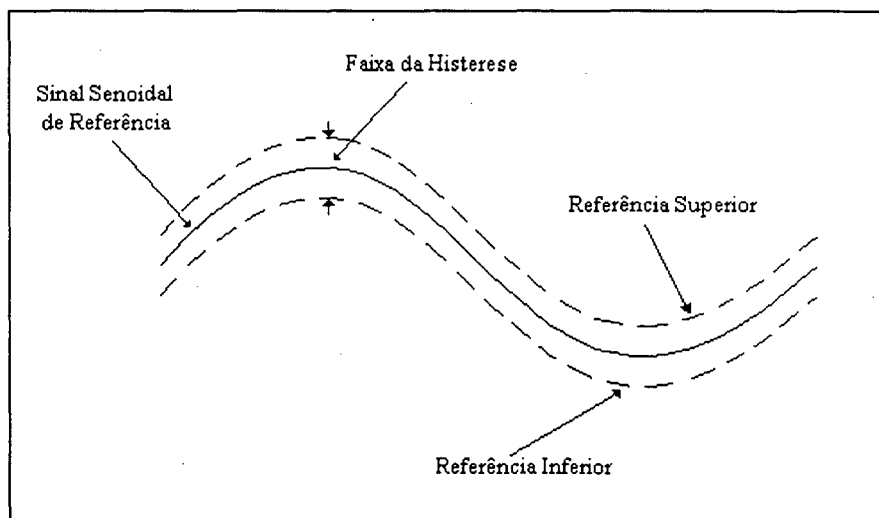


Figura 4.2 Modulação senoidal com histerese

Quando a variável controlada (corrente) alcança o limite superior da referência, um grupo de interruptores serão disparados ou bloqueados, a fim de que o valor da variável diminua até que o limite inferior da referência seja atingido. Quando isto acontecer, novamente um grupo de interruptores entra em condução ou é bloqueado a fim de aumentar o valor da variável. A variável controlada é assim forçada a seguir a referência senoidal dentro da faixa de histerese. Na figura 4.3 é ilustrado o comportamento da variável controlada dentro da faixa de histerese [18][25].

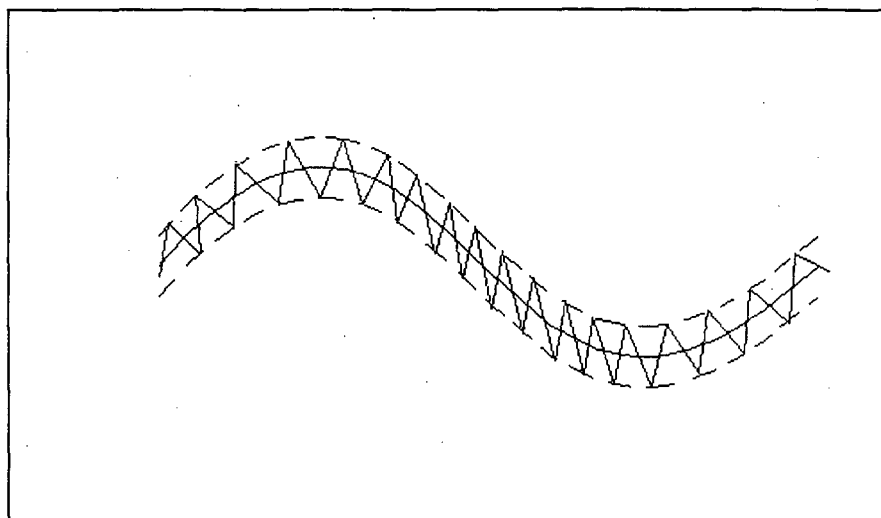


Figura 4.3 Comportamento do sinal dentro da faixa de histerese

A figura 4.4 ilustra a posição do bloco de controle por modulação senoidal por histerese dentro do conjunto conversor/estrutura eletromagnética. A variável controlada é a corrente na estrutura eletromagnética, que é comparada com a referência senoidal e os seus limites superior e inferior. Como resultado desta comparação, são gerados os pulsos de comando dos interruptores do conversor estático, a fim de que sejam disparados ou bloqueados, com o objetivo de forçar a corrente a se manter dentro da faixa de histerese.

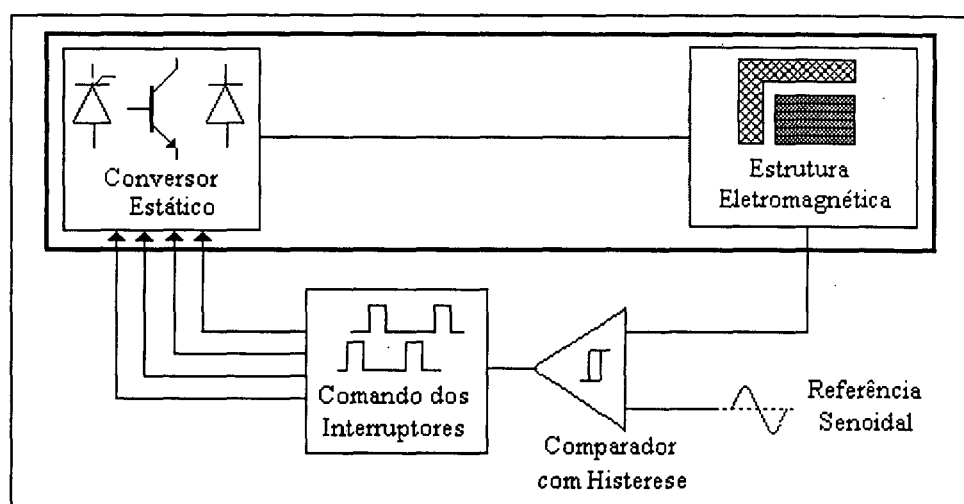


Figura 4.4 Diagrama de blocos do conjunto conversor/estrutura eletromagnética e controle por modulação senoidal com histerese



#### 4.2.1 Exemplos de aplicação e resultados obtidos

Para ilustrar a técnica de controle, explicada acima, são apresentados quatro exemplos simples que procuram ilustrar como funciona o método desenvolvido para levar em conta a malha de realimentação. A validação dos resultados é feita com o programa PSPICE versão 5.4 para Windows 3.1.

A estrutura eletromagnética, discretizada pelo método dos elementos finitos aparece na figura 4.5 e na figura 4.6 o mapa das linhas de campo para esta estrutura. A simulação deste dispositivo eletromagnético é feita através do programa EFCAD. Este dispositivo eletromagnético será utilizado em todos os exemplos apresentados neste capítulo. Para efeito da simulação com o PSPICE, ele será representado por um indutor cujo valor é calculado pelo EFCAD.

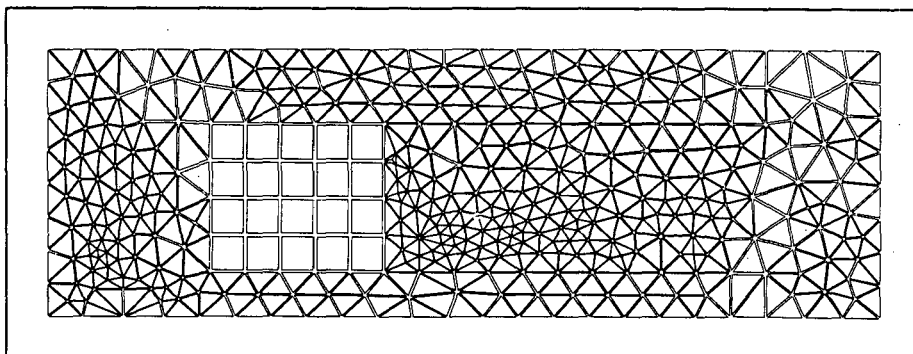


Figura 4.5 Dispositivo eletromagnético discretizado pelo método dos elementos finitos

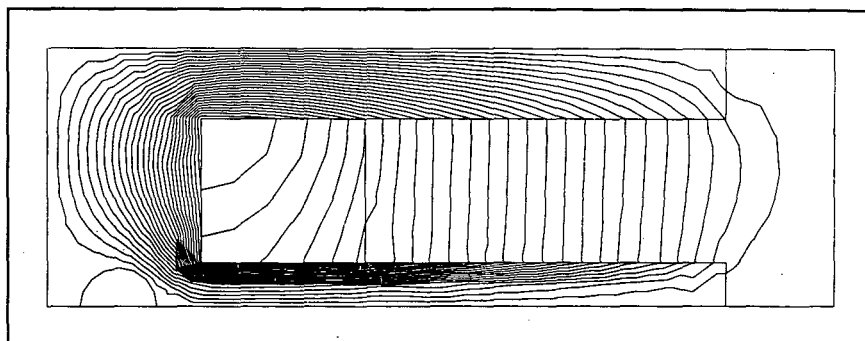


Figura 4.6 Mapa das linhas de campo do dispositivo eletromagnético

#### 4.2.1.1 Inversor monofásico em ponte completa

O primeiro exemplo considerado é o inversor monofásico em ponte completa. A carga do inversor está composta de um resistor conectado em série com um dispositivo eletromagnético. O dispositivo eletromagnético é mostrado nas figuras 4.5 e 4.6. O circuito do inversor em estudo é apresentado na figura 4.7.

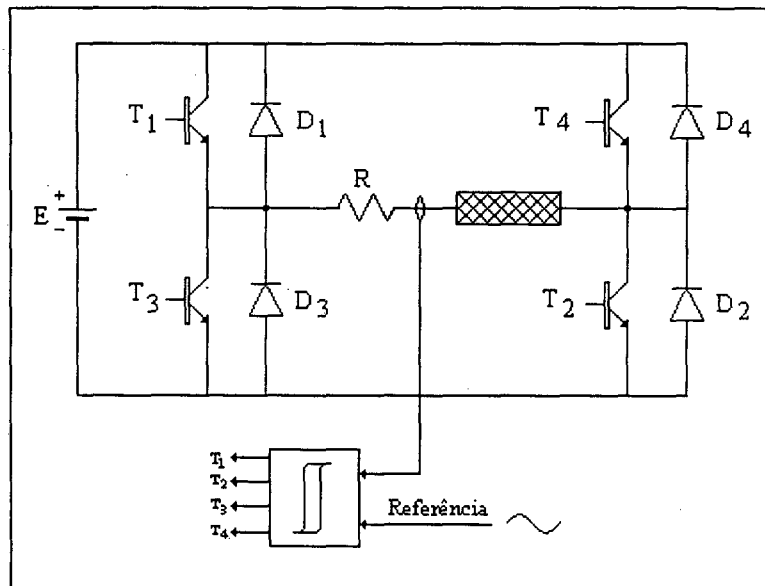


Figura 4.7 Inversor monofásico em ponte completa

onde:

$$E = 50 \text{ V};$$

$$R = 2 \text{ Ohms};$$

$$\text{Espiras dispositivo eletromagnético} = 260 \text{ (Indutância}=9.86\text{mH)}.$$

O controle por modulação senoidal com histerese tem os seguintes dados:

$$\text{Amplitude} = 4 \text{ A};$$

$$\text{Frequência} = 60 \text{ Hz}$$

$$\text{Histerese} = 0.5$$

$$\text{fase} = 0$$

$$\text{Período de amostragem} = 5\mu\text{s}$$

O princípio de funcionamento do circuito da figura 4.7 é o seguinte, inicialmente T1 e T2 estão conduzindo e a corrente no dispositivo eletromagnético aumenta até atingir o limite superior da referência, nesse instante T1 e T2 serão bloqueados, enquanto T3 e T4 entram em condução. Quando a corrente na estrutura eletromagnética atingir o limite inferior, T3 e T4 são bloqueados e T1 e T2 conduzem [21], este processo é repetido durante todo o intervalo de simulação.

Foram considerados dois tipos de interruptores neste exemplo, transistores e tiristores. A corrente no dispositivo eletromagnético, resultado da simulação do inversor em ponte completa com transistor, é apresentada na figura 4.8.

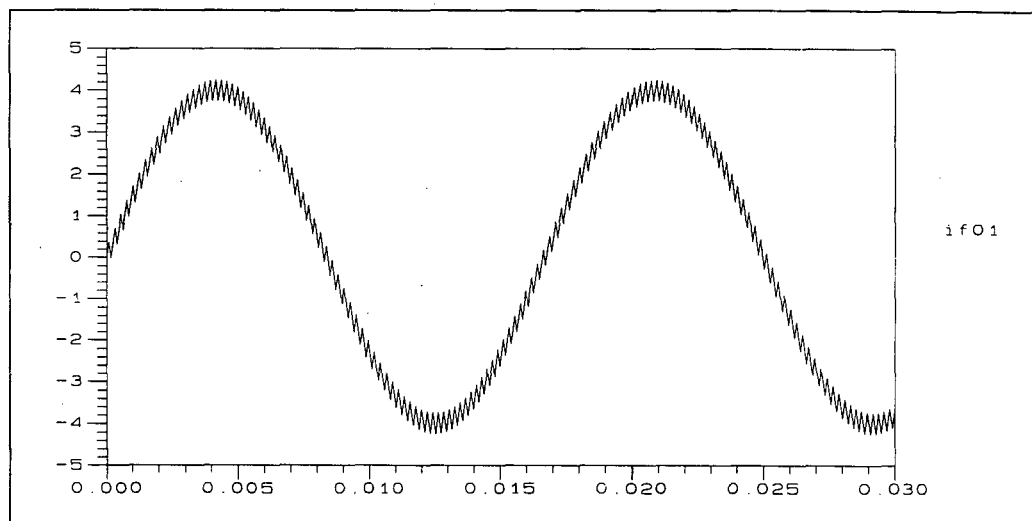


Figura 4.8 Corrente no dispositivo eletromagnético para o inversor a transistor

Para a simulação do inversor ponte completa, onde o interruptor é um tiristor, a corrente no dispositivo eletromagnético é da forma que aparece na figura 4.9.

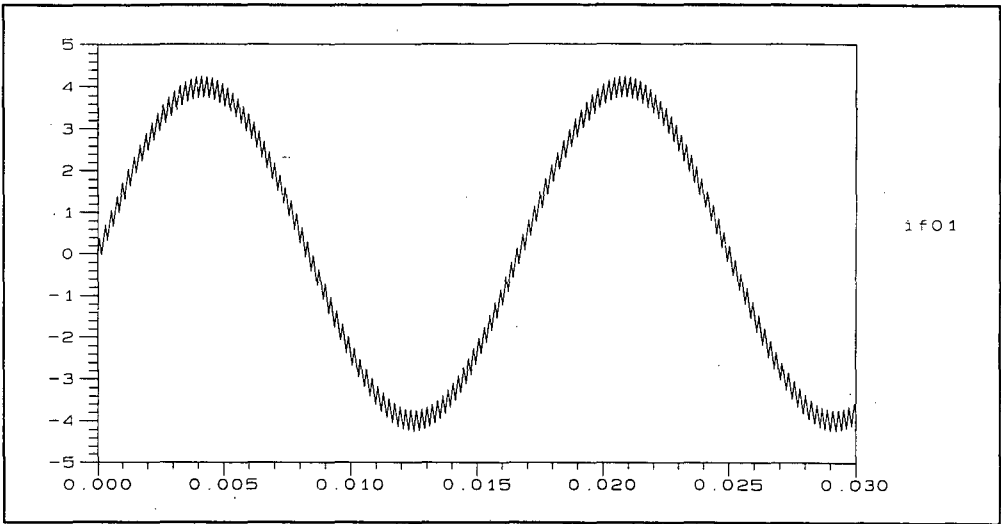


Figura 4.9 Corrente no dispositivo eletromagnético para o inversor a tiristor

O inversor ponte completa também foi simulado utilizando o programa PSPICE versão 5.4 para Windows 3.1. Para efeito da simulação com o PSPICE, o dispositivo eletromagnético é considerado como sendo um indutor, esta consideração é feita para todas as aplicações deste trabalho. A corrente neste indutor é mostrada na figura 4.10.

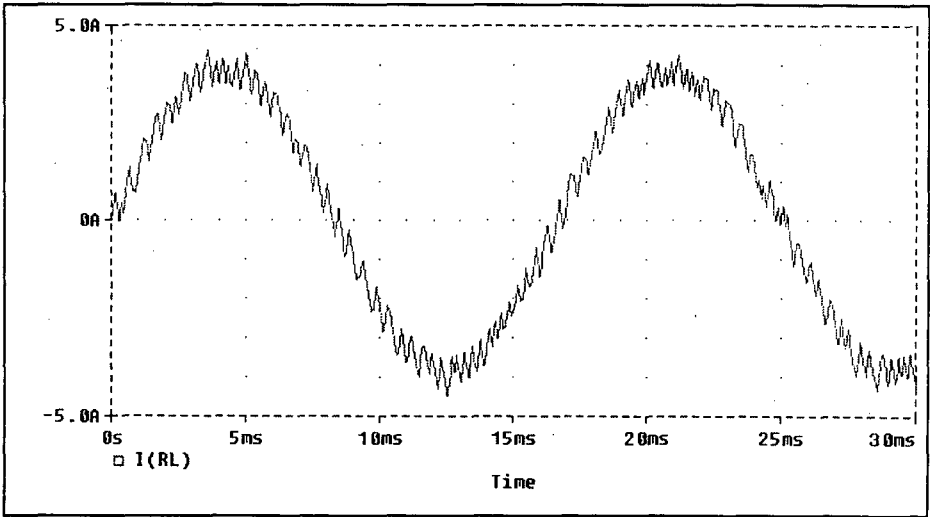


Figura 4.10 Corrente no indutor para o inversor ponte completa (PSPICE)

Pode-se observar que as formas de onda, obtidas pela simulação do programa com malha de realimentação no modo amostrado, são semelhantes às obtidas pela simulação com o programa PSPICE.

#### 4.2.1.2 Inversor monofásico meia ponte

Neste exemplo o inversor monofásico é do tipo meia ponte. A carga do inversor é composta de um capacitor conectado em série com um resistor e o dispositivo eletromagnético. O circuito do inversor em estudo é mostrado na figura 4.11.

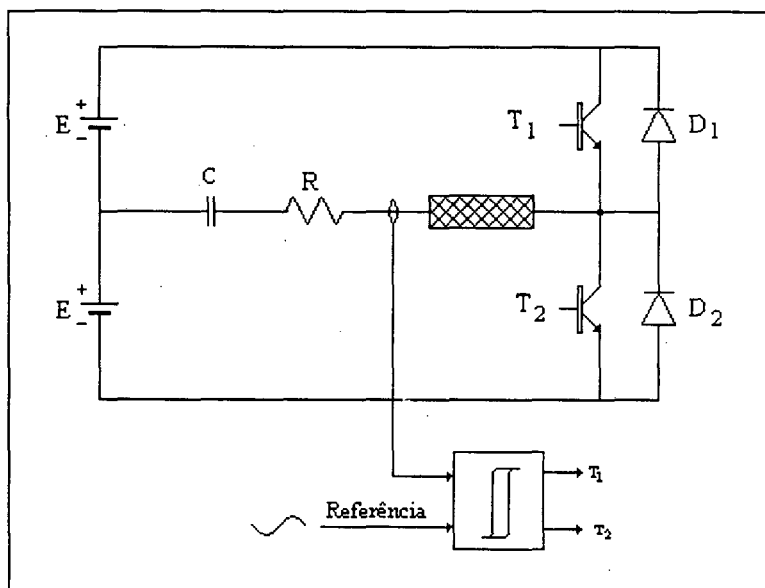


Figura 4.11 Inversor monofásico em meia ponte

onde:

$$E = 50 \text{ V};$$

$$R = 2 \text{ Ohms};$$

$$C = 1000 \mu\text{F};$$

$$\text{Espiras no dispositivo eletromagnético} = 260 \text{ (Indutância} = 9.86 \text{ mH)}.$$

A modulação senoidal com histerese tem os seguintes dados:

Amplitude = 4 A;

Frequência = 60 Hz

Histerese = 0.5

fase = 0

Período de amostragem = 5 $\mu$ s

O princípio de funcionamento do circuito da figura 4.11 é similar ao inversor da figura 4.7. Inicialmente T1 está conduzindo, a corrente no dispositivo eletromagnético aumenta até atingir o limite superior da referência, nesse instante T1 é bloqueado, enquanto T2 entra em condução. Quando a corrente na estrutura eletromagnética atingir o limite inferior, T2 é bloqueado e T1 conduz; este processo é repetido durante todo o intervalo de simulação [21].

Neste exemplo do inversor foram considerados apenas transistores. A forma de onda resultante da corrente no dispositivo eletromagnético aparece na figura 4.12.

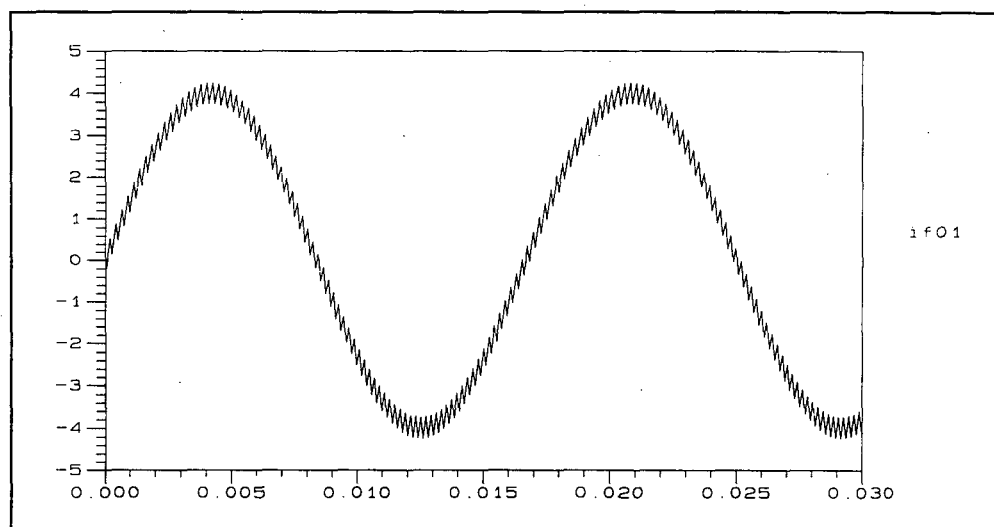


Figura 4.12 Corrente no dispositivo eletromagnético para inversor meia ponte a transistor.

O mesmo inversor meia ponte simulado utilizando o programa PSPICE, gerou a curva da corrente no indutor, que representa o dispositivo eletromagnético (figura 4.13).

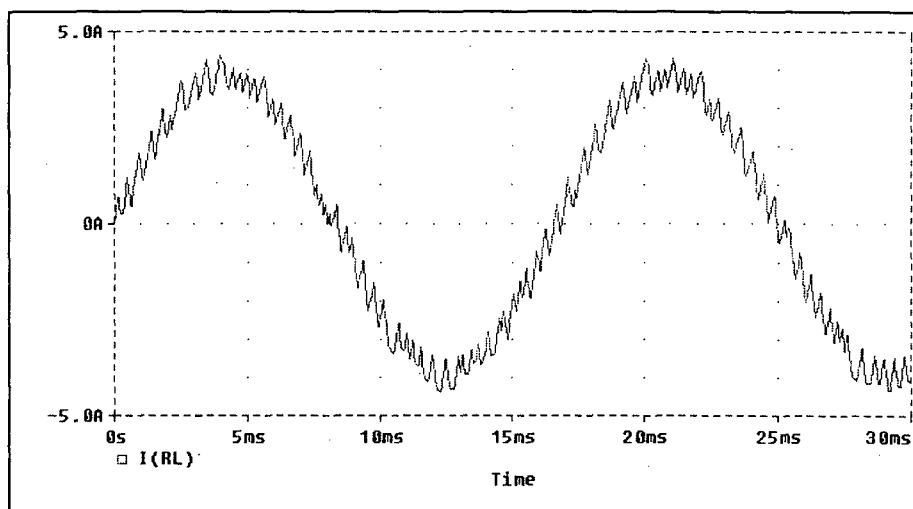


Figura 4.13 Corrente no indutor para o inversor em meia ponte (PSPICE)

#### 4.2.1.3 Chopper classe A

O seguinte exemplo é o *chopper* classe A. A carga é composta de um resistor conectado em série com um dispositivo eletromagnético. O circuito do *chopper* em estudo é ilustrado na figura 4.14.

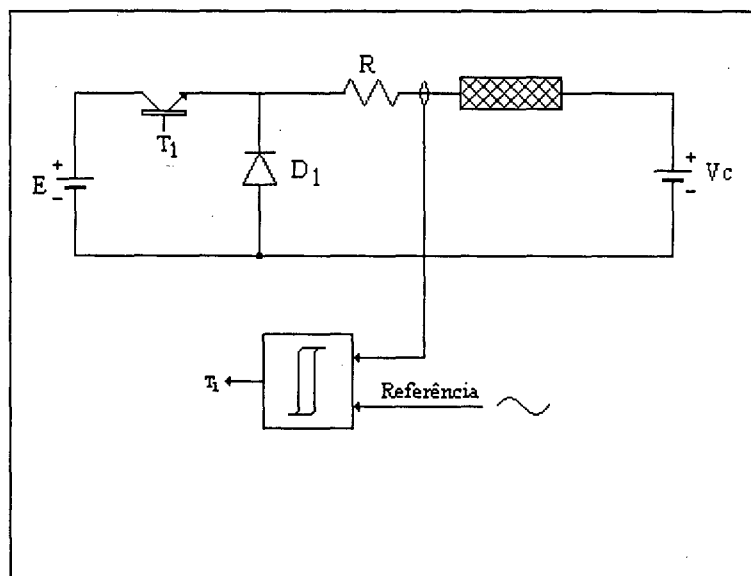


Figura 4.14 Chopper classe A

onde:

$$E = 110 \text{ V};$$

$$V_c = 55 \text{ V};$$

$$R = 0.2 \text{ Ohms};$$

$$\text{Espiras no dispositivo eletromagnético} = 115 \text{ (Indutância}=1.93\text{mH)}.$$

A modulação senoidal com histerese contém os seguintes dados:

$$\text{Amplitude} = 4 \text{ A};$$

$$\text{Frequência} = 40 \text{ Hz}$$

$$\text{Histerese} = 0.5$$

$$\text{fase} = 0$$

$$\text{Período de amostragem} = 5\mu\text{s}$$

O princípio de operação do *chopper* da figura 4.14 é explicado a seguir. Inicialmente o interruptor T1 está conduzindo, a corrente flue da fonte de tensão E para a carga e a corrente no dispositivo eletromagnético aumenta até atingir o limite superior da referência. Nesse instante T1 é bloqueado, a energia armazenada no dispositivo eletromagnético é transferida para a carga através do diodo de roda livre D1, fazendo que a corrente no dispositivo



eletromagnético diminua até que a corrente na estrutura eletromagnética atinga o limite inferior, nesse instante T1 entra em condução [8]. Este processo é repetido durante todo o intervalo de simulação.

A forma de onda da corrente no dispositivo eletromagnético para o *chopper* a transistor é apresentada na figura 4.15.

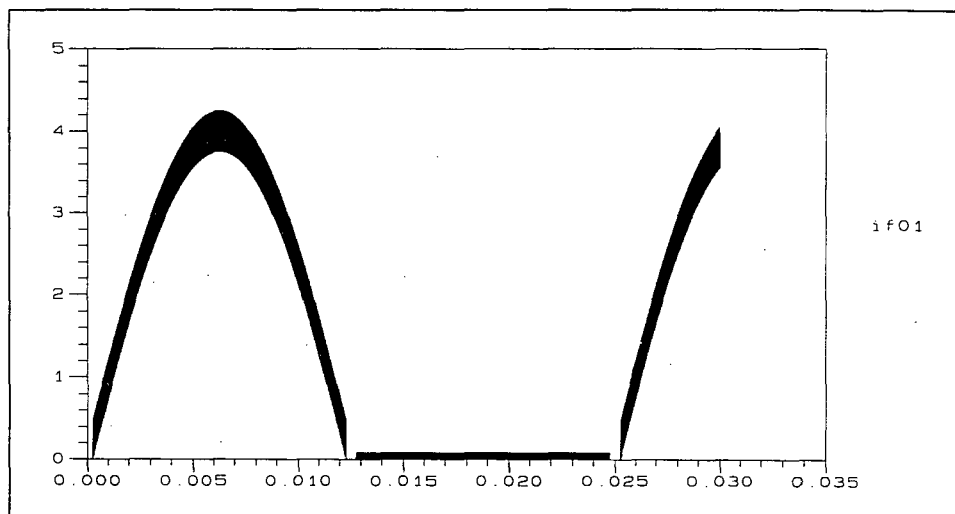


Figura 4.15 Corrente no dispositivo eletromagnético para o *chopper* classe A a transistor

Para o caso do interruptor ser um tiristor, a forma de onda da corrente resultante é apresentada na figura 4.16.

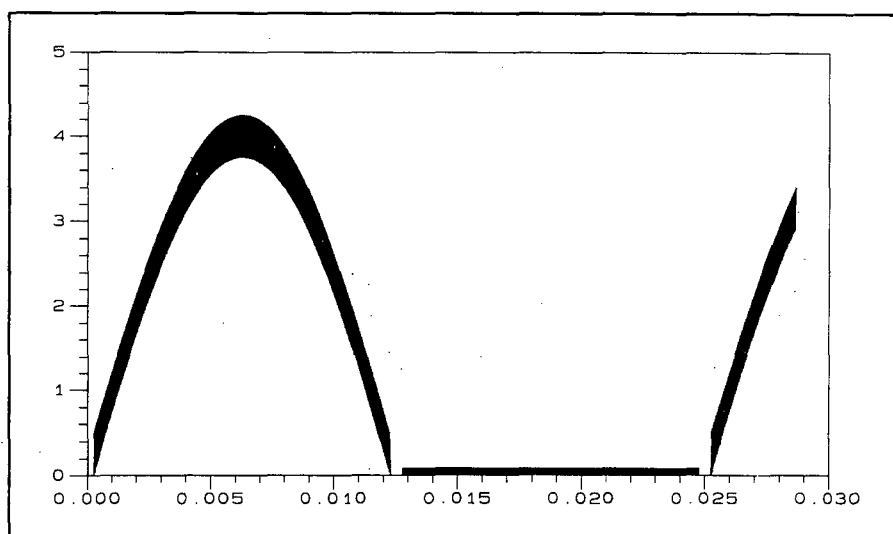


Figura 4.16 Corrente no dispositivo eletromagnético para o *chopper* classe A a tiristor

A simulação do *chopper* classe A no programa PSPICE resultou na curva da corrente no indutor que aparece na figura 4.17.

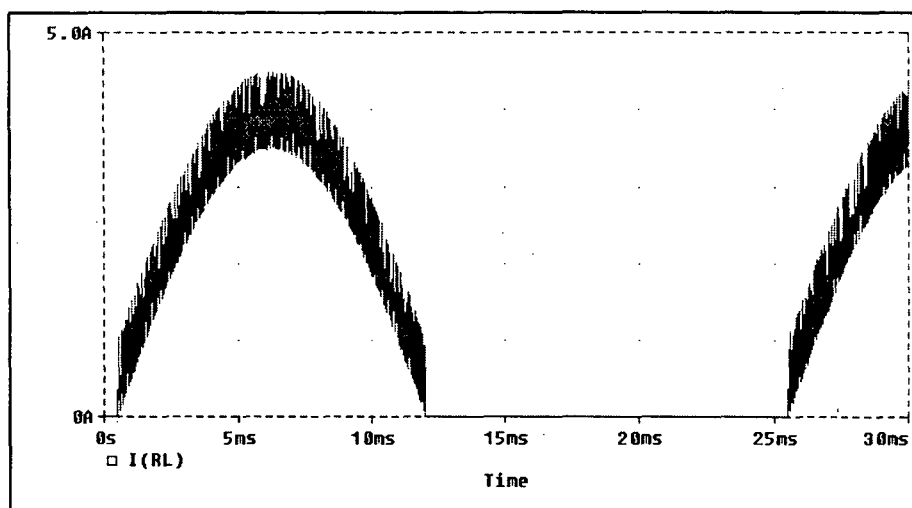


Figura 4.17 Corrente no indutor para o *chopper* classe A (PSPICE)

#### 4.2.1.4 Chopper classe C

O último exemplo é o *chopper* classe C. A carga é composta de um resistor conectado em série com um dispositivo eletromagnético. O circuito do inversor em estudo é apresentado na figura 4.18.

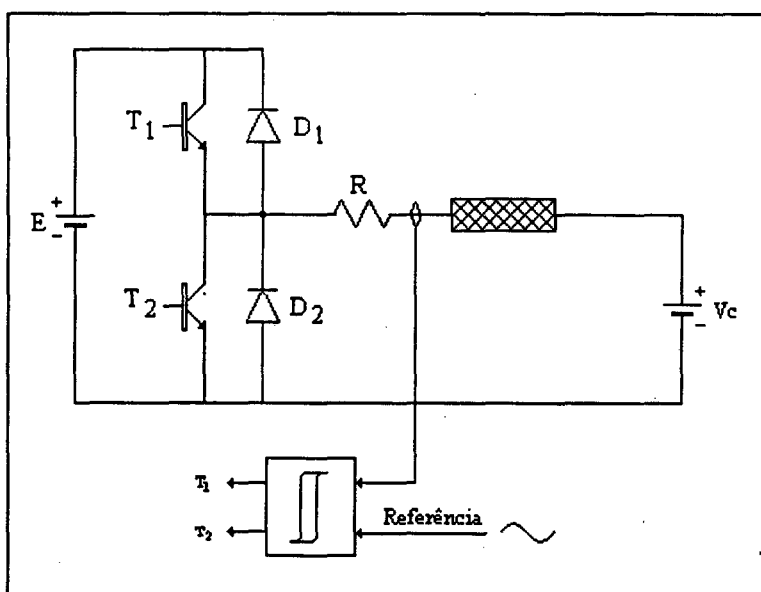


Figura 4.18 Chopper classe C

onde:

$$E = 110 \text{ V};$$

$$V_c = 40 \text{ V};$$

$$R = 2 \text{ Ohms};$$

$$\text{Espiras no dispositivo eletromagnético} = 260 \text{ (Indutância}=9.86\text{mH)}.$$

A modulação senoidal com histerese tem os seguintes dados:

$$\text{Amplitude} = 4 \text{ A};$$

$$\text{Frequência} = 60 \text{ Hz}$$

$$\text{Histerese} = 0.5$$

$$\text{fase} = 0$$

$$\text{Período de amostragem} = 5\mu\text{s}$$

A corrente no *chopper* classe C pode ser positiva ou negativa. A tensão na carga sempre é positiva. O *chopper* classe C é formado pela combinação dos *choppers* classe A e classe B. Os interruptores T1 e D2 operam como um *chopper* classe A, T2 e D1 operam como um *chopper* classe B. A operação do *chopper* classe A foi feita no exemplo anterior. No *chopper* classe B a tensão na carga é positiva, mas a corrente é negativa. Quando T2 conduz, o dispositivo eletromagnético armazena a energia entregue pela fonte  $V_c$ , fazendo com que a tensão na carga diminua e a corrente aumente. Quando T2 é bloqueado, a energia armazenada no dispositivo eletromagnético é devolvida à fonte E via o diodo de roda livre D1, diminuindo a corrente [8][25].

A forma de onda da corrente no dispositivo eletromagnético para o *chopper* classe C a transistor pode ser observada na figura 4.19.

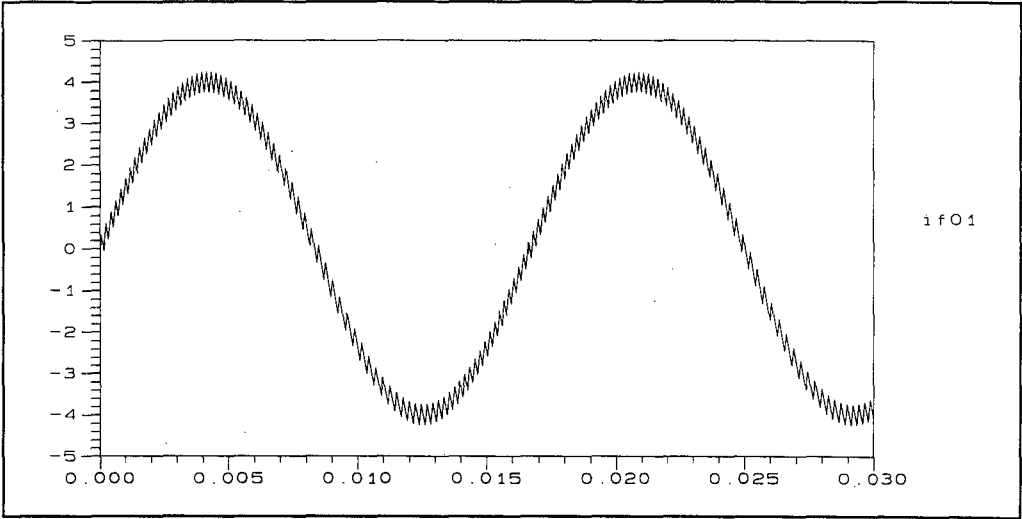


Figura 4.19 Corrente no dispositivo eletromagnético para o *chopper* classe C a transistor

Para o caso de o interruptor ser um tiristor, a forma de onda da corrente no dispositivo eletromagnético é apresentada na figura 4.20.

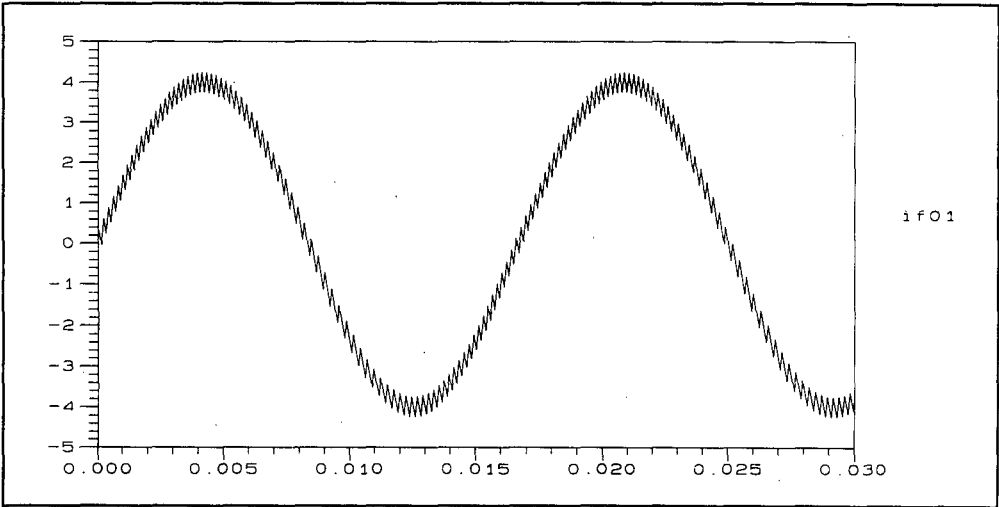


Figura 4.20 Corrente no dispositivo eletromagnético para o *chopper* classe C a tiristor

A simulação com o programa PSPICE deu o seguinte resultado para a corrente no indutor(figura 4.21).

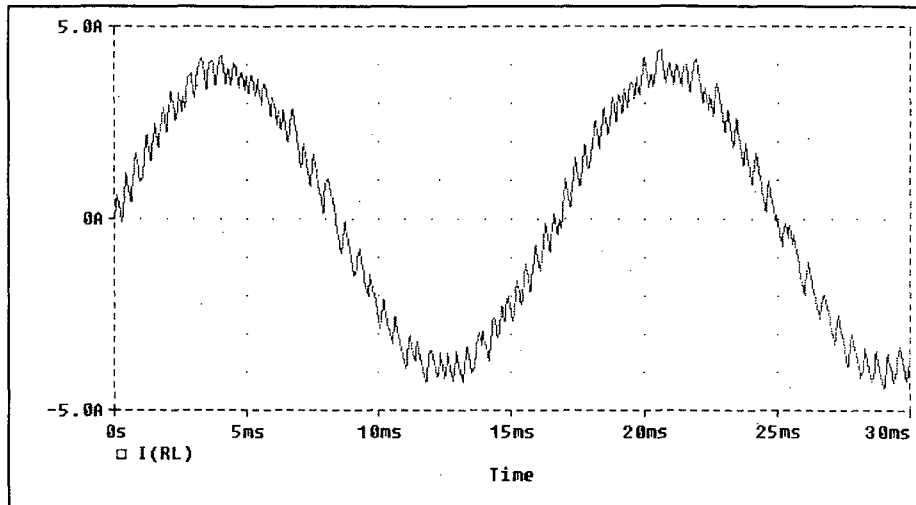


Figura 4.21 Corrente no indutor para o *chopper* classe C (PSPICE)

### 4.3 Modulação por largura de pulsos (PWM)

A Modulação por Largura de Pulsos ou PWM é definida como sendo uma técnica de comutação dos interruptores a frequência de operação constante, sendo que apenas a largura do pulso, ou tempo de condução, varia dentro deste período. Esta comutação é resultado da comparação de um sinal triangular com um sinal de controle [25]. Nas figuras 4.22 a 4.24 são apresentadas algumas das técnicas PWM mais conhecidas.

#### 4.3.1 Modulação por largura de pulso único

Na modulação por largura de pulso único, existe só um único pulso por cada metade do ciclo. A forma da geração dos sinais de comando dos interruptores aparece na figura 4.22. Estes sinais são gerados pela comparação de um sinal de referência retangular de amplitude  $A_r$ , com um sinal triangular de amplitude  $A_t$ . A frequência do sinal de referência determina a frequência fundamental do sinal da saída. Variando-se  $A_r$  de zero até  $A_t$ , a largura do pulso pode ser variado de zero até  $T/2$ , onde  $T$  é o período do sinal triangular [25].

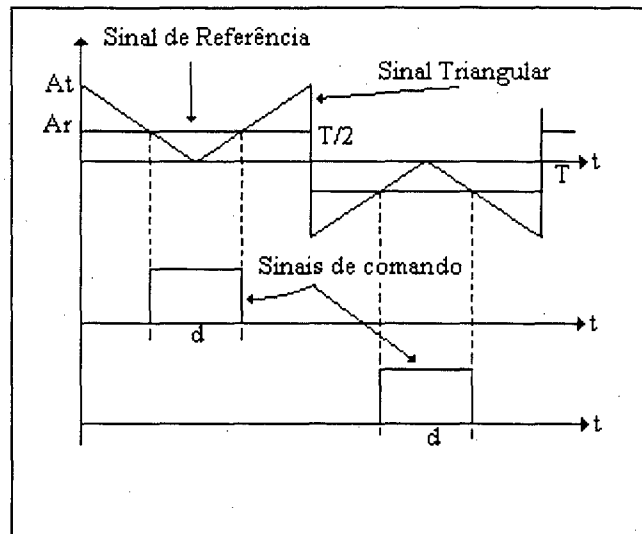


Figura 4.22 Modulação por largura de pulso único

#### 4.3.2 Modulação por largura de pulsos múltiplos

Na modulação por largura de pulsos múltiplos, existem vários pulsos em cada semi período. Esta técnica é uma extensão da técnica anterior. A geração dos sinais de comando (figura 4.23), é realizada pela comparação de um sinal de referência com um sinal triangular. A frequência do sinal de referência fixa a frequência de saída, e a frequência do sinal triangular determina o número de pulsos por semi período [21][25].

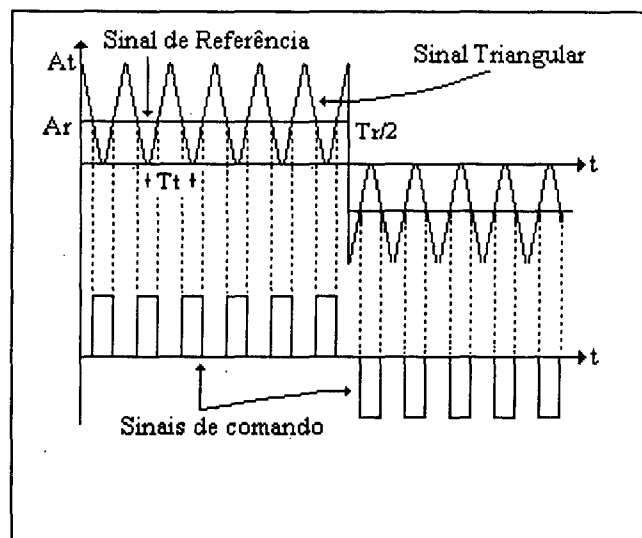


Figura 4.23 Modulação por largura de pulsos múltiplos

### 4.3.3 Modulação por largura de pulsos senoidal

Ao invés de manter a largura dos pulsos iguais, como nos casos anteriores, a largura de cada pulso é variada em proporção à amplitude de um sinal senoidal (figura 4.24). Os sinais de comando são gerados pela comparação de um sinal de referência senoidal com um sinal triangular de período  $T_t$ . A frequência da referência ( $1/T_s$ ) determina a frequência de saída. O número de pulsos num semi período depende da frequência da triangular [4].

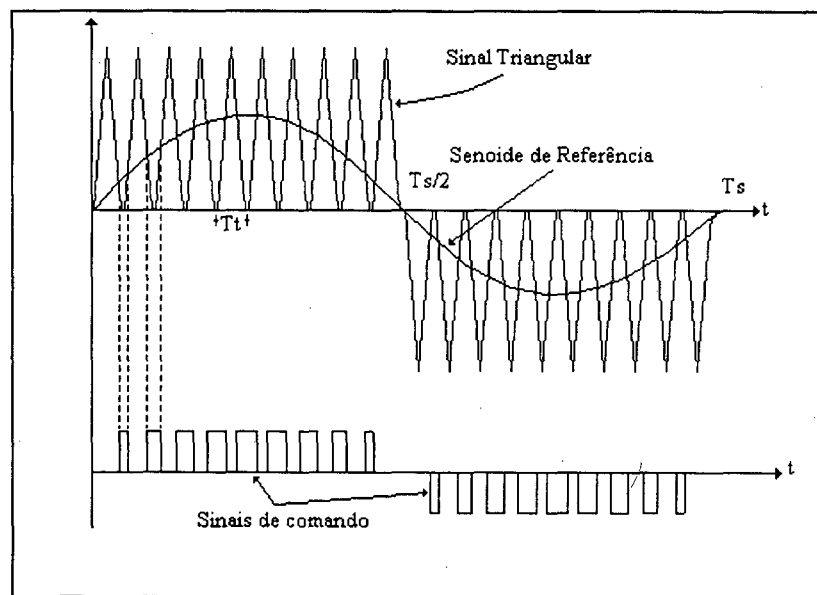


Figura 4.24 Modulação por largura de pulsos senoidal

### 4.3.4 Exemplo de aplicação e resultados obtidos

#### 4.3.4.1 Inversor monofásico em ponte completa (Caso 1)

Para aplicar a técnica de controle de modulação por largura de pulsos (PWM), utiliza-se o circuito inversor em ponte completa a transistores explicado no parágrafo 4.2.1.1. A carga do inversor está composta de um resistor conectado em série com um dispositivo eletromagnético. O dispositivo eletromagnético é mostrado nas figuras 4.5 e 4.6. O circuito do

inversor em estudo aparece na figura 4.7. O tipo de PWM a utilizar neste exemplo é o PWM senoidal.

Os dados para o circuito inversor são os seguintes:

$E = 50 \text{ V};$

$R = 2 \text{ Ohms};$

Espiras no dispositivo eletromagnético = 260 (Indutância=9.86mH).

Para o controle por modulação da largura dos pulsos utiliza-se como portadora um sinal triangular isósceles que tem os seguinte valores nos seus parâmetros:

Amplitude = 12A;

Frequência = 600 Hz.

O sinal de referência será senoidal e com os seguintes dados:

Amplitude = 10;

Frequência = 50 Hz.

O funcionamento do circuito já foi explicado no parágrafo 4.3.3. A geração dos pulsos de comando dos interruptores é ilustrada na figura 4.24. Na figura 4.25 é apresentado o resultado da simulação obtida.

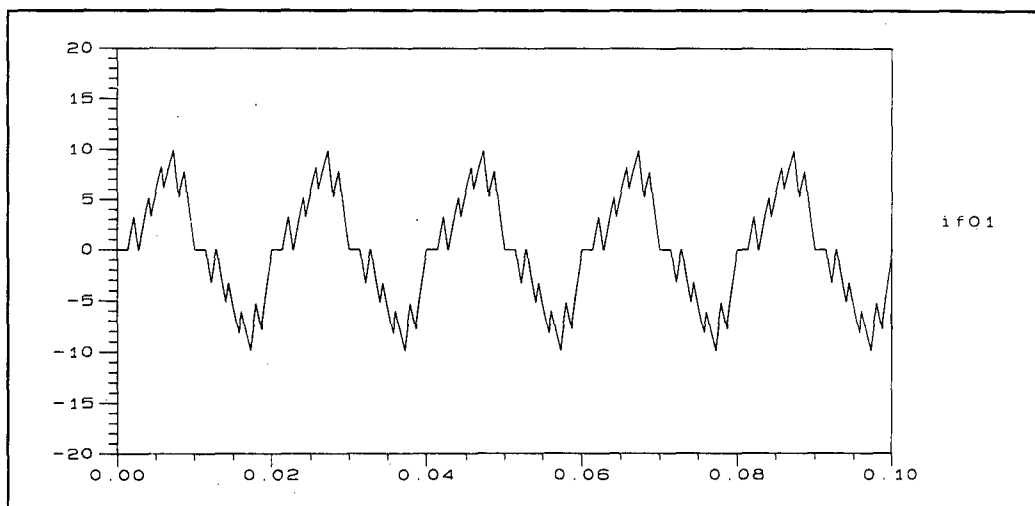


Figura 4.25 Corrente no dispositivo eletromagnético (Caso 1)



Com a simulação no programa PSPICE obtém-se a curva da corrente na carga mostrada na figura 4.26.

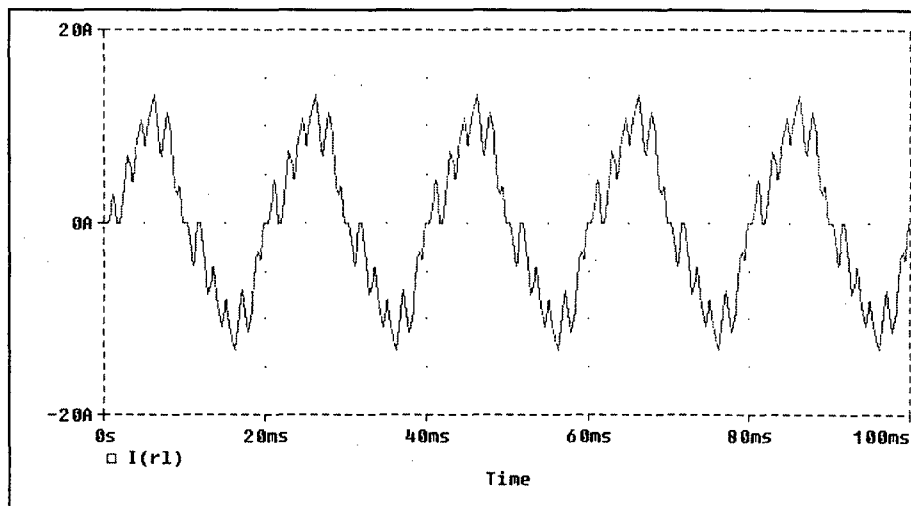


Figura 4.26 Corrente no indutor (Caso1-PSPICE))

#### 4.3.4.2 Inversor monofásico em ponte completa (Caso 2)

Um segundo caso para o inversor em ponte completa foi considerado. A diferença com o caso anterior é a frequência da triangular ser maior. O propósito foi testar a resposta do programa frente a uma variação nos parâmetros.

Os dados para este novo caso são os seguintes:

$E = 50 \text{ V};$

$R = 2 \text{ Ohms};$

Espiras no dispositivo eletromagnético = 260 (Indutância=9.86mH).

Para o controle por modulação da largura dos pulsos, tem-se os seguinte valores nos parâmetros do sinal triangular:

Amplitude = 12A;

Frequência = 6 KHz.

O sinal de referência será senoidal mantém os seus dados:

Amplitude = 10;

Frequência = 50 Hz.

Na figura 4.27 apresenta-se o resultado da simulação obtida.

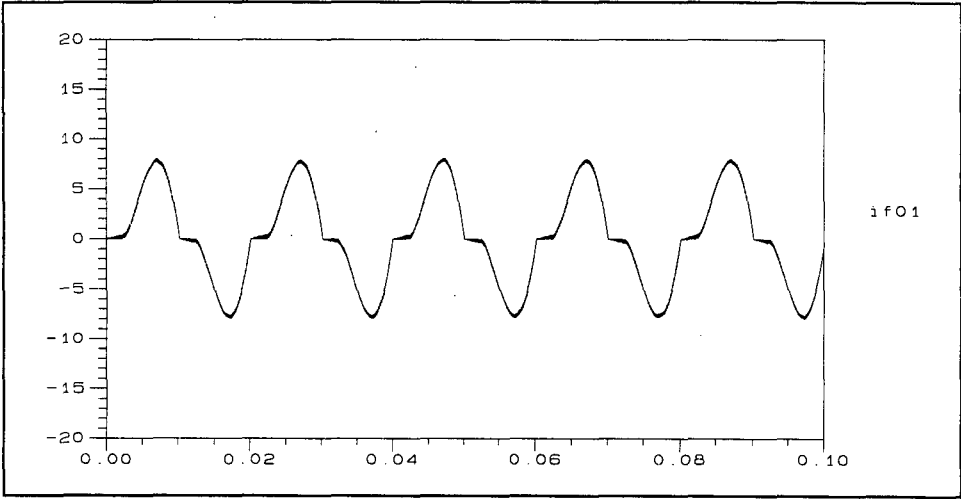


Figura 4.27 Corrente no dispositivo eletromagnético (Caso2).

Com a simulação no programa PSPICE obtém-se a curva da corrente na carga da figura 4.28.

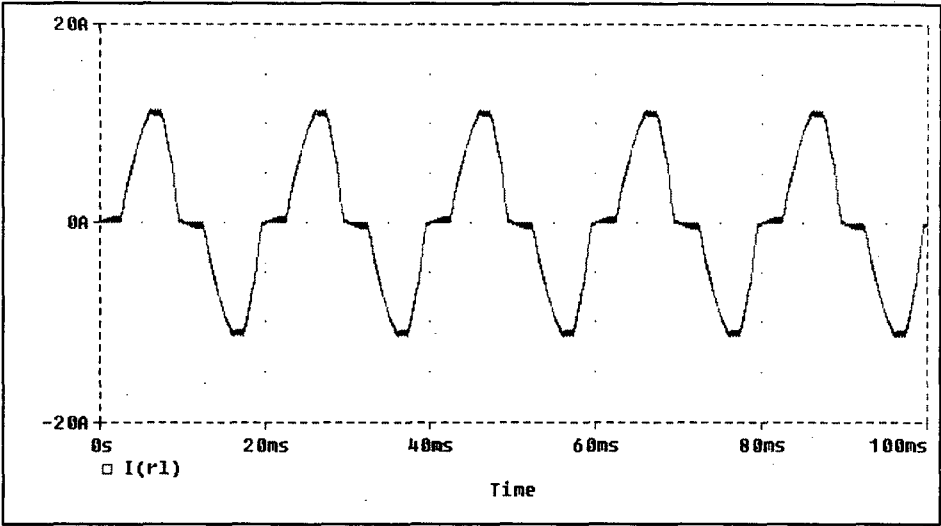


Figura 4.28 Corrente no indutor (Caso2-PSPICE)

#### 4.4 Conclusões

Os exemplos de aplicação, aqui apresentados, são simples e têm como finalidade testar o método implementado levando em conta a malha de realimentação. Para validar os resultados foi utilizado o programa PSPICE versão 5.4 para Windows 3.1, programa amplamente utilizado na análise de circuitos eletrônicos por computador.

Os circuitos considerados para aplicação foram: inversor em ponte completa, inversor meia ponte, *chopper* classe A e *chopper* classe C. As técnicas de controle foram por modulação senoidal com histerese e modulação por largura de pulso (PWM). As formas de onda, obtidas da simulação do programa de controle implementado, são semelhantes às obtidas pela simulação com o programa PSPICE, evidenciando o funcionamento do método desenvolvido e do programa implementado.

## Conclusão Geral

No presente trabalho foi desenvolvido um método, que permite levar em conta a malha de realimentação, para a simulação de estruturas eletromagnéticas conectadas a conversores estáticos. Para conhecer de modo preciso os instantes em que aparecem as ordens de comando dos interruptores, adotou-se um método que considera laços de controle em malha fechada no modo amostrado. Neste método, as ordens de comando dos interruptores não são mais pré-definidos, mas resultado das grandezas elétricas da estrutura eletromagnética e a lei de controle implementada.

A definição das transições das Rede de Pétri, cujo formalismo foi apresentado no capítulo 2, foi modificada, a fim de levar em conta estes laços de controle em malha fechada. Algumas condições de transição foram adicionadas, para descrever o resultado da aplicação de uma lei de controle qualquer, independente do circuito em estudo. Assim, as ordens de comando dos interruptores podem ser geradas de forma independente, portanto os circuitos de controle que geram estas ordens de comando não precisam ser modelados.

O método desenvolvido emprega a técnica do passo de cálculo fixo, onde o passo é mantido constante no decorrer da simulação. A escolha deste método deve-se ao fato de que a dinâmica dos comando não é conhecida, e também pela sua simplicidade na implementação.

O período de amostragem pode ser escolhido segundo os seguintes critérios: se o circuito a simular é discreto, ele será utilizado num montagem real; mas se o circuito a simular for contínuo do tipo analógico, a precisão desejada sobre os instantes de aparição das ordens de comando permite fazer a escolha.

Para a aplicação do método desenvolvido, foram simuladas varias situações, com circuitos simples com a finalidade de testar o método, tais como inversores e *choppers*. As técnicas de controle implementadas foram controle por modulação senoidal com histerese e

modulação por largura de pulso (PWM). A validação dos resultados obtidos na simulação foram feitos com o programa PSPICE versão 5.4 para Windows 3.1, mostrando em todos os casos que os resultados obtidos na simulação foram satisfatórios, evidenciando o funcionamento do método desenvolvido.

Existem também algumas limitações relacionadas ao controle no modo amostrado. A principal delas é a escolha da frequência de amostragem. Existe uma relação entre qualidade de informação e custo de tempo de cálculo ou entre a frequência de amostragem e a velocidade de variação das grandezas que se desejam medir. Em ambos dos casos, a escolha da frequência de amostragem dependerá da precisão desejada sobre os instante de aparição das ordens de comando. Deste período de amostragem depende o passo de cálculo, que não pode ser maior. O passo de cálculo deve ser menor ou igual ao período de amostragem.

O método desenvolvido e o programa computacional implementado serão de grande importância na análise de estruturas eletromagnéticas alimentadas por conversores estáticos considerando a sua malha de controle. Esta ferramenta de análise foi implementada dentro do programa EFCIR, desenvolvido no GRUCAD.

Pode-se sugerir para trabalhos futuros:

- Desenvolver uma biblioteca dos reguladores mais utilizados.
- Consideração de estruturas eletromagnéticas trifásicas.
- Introdução de não linearidades.
- Estender o método proposto a dispositivos eletromagnéticos modelados em três dimensões e nas máquinas elétricas rotativas.
- Estender o estudo para considerar as equações mecânicas nas estruturas eletromagnéticas.

## Referências Bibliográficas

- [1] BALABANIAN, N.; BICKART, T.; *Electrical Network Theory*. John Willey & Sons, Inc., 1969.
- [2] BASTOS, J.P.A.; *Eletromagnetismo e Cálculo de Campos*. Ed. da UFSC, 2da. Edição, Florianópolis, 1992.
- [3] BORDRY, F.; Synthèse des Méthodes de Simulation des Convertisseurs Statiques. Thèse de Doctorat d'Etat, I.N.P. de Toulouse, França, 1985.
- [4] BOSE, B.K.; *Power Electronics and AC Drives*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1986.
- [5] BRUCIAPAGLIA, A.H.; Sistemas Amostrados. Universidade Federal de Santa Catarina, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, ECAI, Florianópolis, 1995.
- [6] CHUA, L.; LIN, P.; *Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [7] DAVAT, B.; Modélisation des Dispositifs Électromagnétiques. Thèse de Doctorat d'Etat, I.N.P. de Toulouse, França, 1984.
- [8] DEWAN, S.B.; *Power Semiconductor Circuits*. John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- [9] FRÖHR, F.; ORTTENBURGER, F.; *Introducción al Control Electrónico*. Siemens Aktiengesellschaft & Marcombo S.A., 1986.
- [10] KUCHEN, B.; CARELLI, R.; GAMBIER A.; *Control Digital*. Edição EBAI, 1988
- [11] KUO-PENG, P.; Simulação Numérica de Conversores Estáticos Conectados a Dispositivos Eletromagnéticos. Relatório CNPq. Processo individual 360152/94-5, Processo institucional 620427/92-0.
- [12] KUO-PENG, P.; BASTOS, J.P.A.; SADOWSKI, N.; CARLSON, R.; Implementação da Malha de Realimentação na Simulação de um Conjunto Conversor/Estrutura Eletromagnética. XI Congresso Brasileiro de Automática, Vol 2, pp 1083-1087, Setembro 1996, SP, Brasil.
- [13] KUO-PENG, P.; SADOWSKI, N.; BASTOS, J.P.A.; CARLSON, R.; LAJOIE-MAZENC, M.; Automatic Determination of Feeding Circuit Equations in a Combined Converter/Electromagnetic Device Analysis. ELETRIMACS'96, September 1996. Saint-Nazaire, França.
- [14] KUO-PENG, P.; SADOWSKI, N.; BASTOS, J.P.A.; CARLSON, R.; BATISTELA, N.J.; LAJOIE-MAZENC, M.; A General Method for Coupling Static Converter with

- Electromagnetics Structures. Proceedings of the 7th Biennial IEEE-CEFC'96, p. 481, March 1996. Okayama, Japão.
- [15] KUO-PENG, P.; SADOWSKI, N.; BASTOS, J.P.A.; CARLSON, R.; BATISTELA, N.J.; LAJOIE-MAZENC, M.; A General Method for Coupling Static Converter with Electromagnetics Structures. IEEE Transactions on Magnetics, Vol 33, No. 2, pp. 2004-2009, March 1997.
- [16] KUO-PENG, P.; BASTOS, J.P.A.; SADOWSKI, N.; CARLSON, R.; Analysis of a Combined Converter-Electromagnetic Device by Taking Into Account its Control Loops. Proceedings of the IEEE-IEMDC'97, pp. MB2-4.1-MB2-4.3, May 1997, Milwaukee, USA.
- [17] MARTINS, D.; Análise de Sistemas Eletrônicos de Potência por Computador. Revista SBA: Controle e Automação, Vol 2, No. 1, pp 31-39, 1988.
- [18] MARTINS, D.; DE SOUZA, A.; Programa SCVOLT, Implementação de Malha de Realimentação. III Seminário de Eletrônica de Potência, pp.174-179, Dezembro 1990, Florianópolis, Brasil.
- [19] MESQUITA, R.C.; Cálculos de Campos Eletromagnéticos Tridimensionales Utilizando Elementos Finitos: Magnetostática, Quase-Estática e Aquecimento Indutivo. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina. CETD, UFSC, PEEL, Brasil, 1990.
- [20] ORSINI, L.Q.; *Circuitos Elétricos*. Editôra Edgard Blücher, SP, Brasil, 1971.
- [21] PERIN, A.; Modulação PWM. Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Departamento de Engenharia Elétrica, Instituto de Eletrônica de Potência, Florianópolis, 1995.
- [22] PIQUET, H.; CHERON, Y.; Digital Simulation of Static Converter Taking Account of Control Loops. Proceedings of the 3rd European Conference on Power Electronic and Applications, Vol 1, pp. 213-219, October 1989. Aachen, Alemanha.
- [23] PIQUET, H.; Simulation Numérique des Convertisseurs Statiques: Prise en Compte des Boucles de Contrôle. Thèse de doctorat I.N.P. de Toulouse, França, 1990.
- [24] PIQUET, H.; OMS, F.; CHERON Y.; Simulation Numérique des Convertisseurs Statiques: Les Performances du Logiciel SCRIPT. Revue Générale de L'électricité, No. 1, pp. 17-27, Janvier 1990.
- [25] RASHID, M.; *Power Electronics Circuits, Devices and Applications*. Prentice Hall Inc., Englewoods Cliffs, New Jersey, 1993.

- [26] SADOWSKI, N.; Modélisation des Machines Électriques à Partir de la Résolution des Équations du Champ en Tenant Compte du Mouvement et du Circuit d’Alimentation (Logiciel EFCAD). Thèse de doctorat I.N.P. de Toulouse, França, 1993.
- [27] SADOWSKI, N.; Elementos Finitos Aplicados às Máquinas Elétricas. Curso de pós-graduação em Máquinas Elétricas-WEG S.A., 1996, Jaraguá do Sul, Brasil.